答・解説

【1】

第1式を$P(x)$とする。

(1)　$x-2$で割った余りは

$$P(2)=2\cdot2^3-2^2+3=\mathbf{15}$$

【2】

剰余の定理により，$P(-3)=-5$であるから

$$(-3)^3-3a\cdot(-3)+4=-5$$

よって　$\boldsymbol{a=2}$

【3】

(1)　$P(x)=x^3+3x^2-4$とおくと，$P(1)=0$より，$x-1$を因数にもつ。

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+4x\ \ +4 \\ \hline
x-1 & x^3+3x^2\qquad -4 \\
 & \underline{x^3-\ x^2\qquad\quad} \\
 & 4x^2\qquad\quad \\
 & \underline{4x^2-4x\quad} \\
 & 4x-4 \\
 & \underline{4x-4} \\
 & 0
\end{array}$$

〔別解〕

組立除法を用いると

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\
+) & & 1 & 4 & 4 \\ \hline
 & 1 & 4 & 4 & \boxed{0}
\end{array}$$

上の計算より

$$\begin{aligned}
&x^3+3x^2-4\\
&=(x-1)(x^2+4x+4)\\
&=\boldsymbol{(x-1)(x+2)^2}
\end{aligned}$$

【4】

(1)　$(x^2)^2-3x^2+2=0$

$$(x^2-1)(x^2-2)=0$$

よって　$x^2=1,\ 2$

ゆえに　$\boldsymbol{x=\pm1,\ \pm\sqrt{2}}$

【5】

(1)　$P(x)=6x^3+4x^2-x+1$とおくと，$P(-1)=0$より，$P(x)$は$x+1$を因数にもつ。

$$\begin{array}{r|l}
 & 6x^2-2x\ \ +1 \\ \hline
x+1 & 6x^3+4x^2-\ x+1 \\
 & \underline{6x^3+6x^2\qquad\quad} \\
 & -2x^2-\ x\quad \\
 & \underline{-2x^2-2x\quad} \\
 & x+1 \\
 & \underline{x+1} \\
 & 0
\end{array}$$

〔別解〕

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 6 & 4 & -1 & 1 \\
+) & & -6 & 2 & -1 \\ \hline
 & 6 & -2 & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

上の計算より

$$P(x)=(x+1)(6x^2-2x+1)$$

よって

$$(x+1)(6x^2-2x+1)=0$$

ゆえに　$\boldsymbol{x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{5}i}{6}}$

【6】

(1)　$P(x)=2x^4+x^3-6x^2+x+2$

とおく。

$$P(1)=2\cdot1^4+1^3-6\cdot1^2+1+2=0$$

であるから，$P(x)$は$x-1$を因数にもつ。

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^3+3x^2-3x\ \ -2 \\ \hline
x-1 & 2x^4+\ x^3-6x^2+\ x+2 \\
 & \underline{2x^4-2x^3\qquad\qquad\qquad} \\
 & 3x^3-6x^2\qquad\quad \\
 & \underline{3x^3-3x^2\qquad\quad} \\
 & -3x^2+\ x\quad \\
 & \underline{-3x^2+3x\quad} \\
 & -2x+2 \\
 & \underline{-2x+2} \\
 & 0
\end{array}$$

〔別解〕

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 2 & 1 & -6 & 1 & 2 \\
+) & & 2 & 3 & -3 & -2 \\ \hline
 & 2 & 3 & -3 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

上の計算より

$$P(x)=(x-1)(2x^3+3x^2-3x-2)$$

ここで，$Q(x)=2x^3+3x^2-3x-2$とおくと

$$Q(1)=2\cdot1^3+3\cdot1^2-3\cdot1-2=0$$

であるから，$Q(x)$は$x-1$を因数にもつ。

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+5x\ \ +2 \\ \hline
x-1 & 2x^3+3x^2-3x-2 \\
 & \underline{2x^3-2x^2\qquad\qquad} \\
 & 5x^2-3x\quad \\
 & \underline{5x^2-5x\quad} \\
 & 2x-2 \\
 & \underline{2x-2} \\
 & 0
\end{array}$$

〔別解〕

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 2 & 3 & -3 & -2 \\
+) & & 2 & 5 & 2 \\ \hline
 & 2 & 5 & 2 & \boxed{0}
\end{array}$$

上の計算より

$$Q(x)=(x-1)(2x^2+5x+2)$$

このとき

$$\begin{aligned}
P(x)&=(x-1)^2(2x^2+5x+2)\\
&=(x-1)^2(2x+1)(x+2)
\end{aligned}$$

よって　$(x-1)^2(2x+1)(x+2)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=1,\ -\dfrac{1}{2},\ -2}$

〔別解〕

（偶数次数（この場合は4次）の相反方程式$(ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0)$は両辺をx^2で割って解くことができる。）

$x=0$はこの方程式の解ではないので，両辺をx^2で割ると

$$2x^2+x-6+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

$$2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$$

$$\left\{2\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right\}=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2}$, $x+\dfrac{1}{x}=2$

$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2}$ の両辺に $2x$ を掛けて整理すると

$2x^2+5x+2=0$

$(2x+1)(x+2)=0$

$x=-\dfrac{1}{2}$, -2

$x+\dfrac{1}{x}=2$ の両辺に x を掛けて整理すると

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

以上より，求める解は $x=1$, $-\dfrac{1}{2}$, -2

【7】

(1)　$P(x)=x^3+3x^2+3x+1$ とおく。

$P(-1)=(-1)^3+3\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+1$

$=0$

であるから，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{r}
x^2+2x+1 \\
x+1\,\overline{)\,x^3+3x^2+3x+1} \\
\underline{x^3+x^2} \\
2x^2+3x \\
\underline{2x^2+2x} \\
x+1 \\
\underline{x+1} \\
0
\end{array}
$$

〔別解〕

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
+) & & -1 & -2 & -1 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

上の計算より

$P(x)=(x+1)(x^2+2x+1)$

よって　$(x+1)(x^2+2x+1)=0$

$(x+1)^3=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=-1}$

〔注意〕

左辺を $(x+1)^3$ と因数分解して解いてもよい。

【8】

$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ より

両辺に $(x+3)(x-2)$ を掛けると

$4x-13=a(x-2)+b(x+3)$

右辺を整理すると

$4x-13=(a+b)x+(-2a+3b)$

この等式が恒等式となるためには

$a+b=4$, $-2a+3b=-13$

これを解いて　$\boldsymbol{a=5,\ b=-1}$

【9】

(1)　両辺をそれぞれ変形すると

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

ゆえに

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

(参考)

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

この等式を用いると

$(2^2+3^2)(4^2+5^2)=23^2+2^2=7^2+22^2$

【10】

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}=k$ $(k\neq 0)$ とおくと

$x=2k$, $y=3k$, $z=4k$

2乗すると

$x^2=4k^2$, $y^2=9k^2$, $z^2=16k^2$

ゆえに

$x^2:y^2:z^2=4k^2:9k^2:16k^2=4:9:16$

【11】

$5(x^2+y^2)-(2x-y)^2$

$=x^2+4xy+4y^2$

$=(x+2y)^2\geqq 0$

ゆえに　$5(x^2+y^2)\geqq(2x-y)^2$

等号が成り立つのは　$x+2y=0$

すなわち $\boldsymbol{x=-2y}$ **のとき**である。

【12】

(1)　$2x^2-(6xy-5y^2)$

$=2x^2-6xy+5y^2$

$=2\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)^2+\dfrac{y^2}{2}$

$\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)^2\geqq 0$, $\dfrac{y^2}{2}\geqq 0$ であるから

$2\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)^2+\dfrac{y^2}{2}\geqq 0$

よって　$2x^2\geqq 6xy-5y^2$

等号が成り立つのは，$x-\dfrac{3}{2}y=0$ かつ $y=0$

すなわち，$\boldsymbol{x=y=0}$ のときである。

【13】

(1)　$a>0$, $\dfrac{9}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$a+\dfrac{9}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{9}{a}}=6$

等号が成り立つのは，$a=\dfrac{9}{a}$，すなわち $a^2=9$ のときで，$a>0$ より $\boldsymbol{a=3}$ **のとき**である。

【14】

両辺の平方の差を考えると

$(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a-b)^2$

$=a^2+2|a||b|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=2(|ab|+ab)\geqq 0$

したがって　$(|a|+|b|)^2\geqq|a-b|^2$

$|a|+|b|\geqq 0$, $|a-b|\geqq 0$ であるから

$|a|+|b|\geqq|a-b|$

等号が成り立つのは，$|ab|=-ab$，すなわち　$\boldsymbol{ab\leqq 0}$ **のとき**である。

〔別解〕

教科書p.54応用例題13の不等式において，b を $(-b)$ に置き換えると

$$|a|+|-b| \geqq |a+(-b)|$$

よって　$|a|+|b| \geqq |a-b|$