(1) $z^7 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

よって

$$z^7 = 1$$

$$z^7 - 1 = 0$$

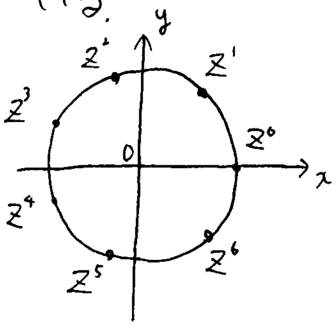
$$(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1) = 0$$

$z \neq 1$ より

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$$

$$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6 = -1$$

(2) z^i $(i = 0, 1, 2, \cdots, 6)$ は複素数平面上の正七角形の各頂点に対応している。



したがって各点は図のようになるので、

$$\overline{z} = z^6$$

$$\overline{z^2} = z^5$$

$$\overline{z^3} = z^4$$

となる。

$$\alpha + \overline{\alpha} = (z+z^2+z^4) + \overline{(z+z^2+z^4)}$$

$$= z+z^2+z^4+z^6+z^5+z^3$$

$$= -1 \quad ((1)\text{より})$$

$$\alpha\overline{\alpha} = (z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3)$$

$$= z^7+z^6+z^4+z+z^7+z^5+z^3+z^2+z^7$$

$$= 3z^7 + (z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)$$

$$= 3 - 1 = 2$$

$\alpha, \overline{\alpha}$ は2次方程式 $x^2+x+2=0$ の解である よって

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

α の虚部は $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$

で、 $\sin\frac{8}{7}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\sin\frac{\pi}{7}$

右上へ

$0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ では $\sin\theta_1 < \sin\theta_2$ なので、

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$$

$$= \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4}{7}\pi - \sin\frac{\pi}{7} > 0$$

よって $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}$

(3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$

$$= \underbrace{(1-z)(1-z^2)(1-z^4)}_{(\text{i})} \cdot \underbrace{(1-z^3)(1-z^5)(1-z^6)}_{(\text{ii})}$$

(i) $(1-z)(1-z^2)(1-z^4)$

$$= 1 - z^4 - z^2 + z^6 - z + z^5 + z^3 - z^7$$

$$= (z+z^2+z^4) - (z^3+z^5+z^6) = \alpha - \overline{\alpha}$$

(ii) $(1-z^3)(1-z^5)(1-z^6)$

$$= 1 - z^6 - z^3 + z^2 - z^5 + z^4 + z - z^7$$

$$= (z+z^2+z^4) - (z^3+z^5+z^6) = \alpha - \overline{\alpha}$$

(i), (ii) より

$$(\overline{\alpha} - \alpha) \cdot (\alpha - \overline{\alpha}) = -(\alpha - \overline{\alpha})^2$$

$$= -\{(\alpha+\overline{\alpha})^2 - 4\alpha\overline{\alpha}\}$$

$$= -(\alpha+\overline{\alpha})^2 + 4\alpha\overline{\alpha}$$

$$= -(-1)^2 + 4 \cdot 2 = 7$$