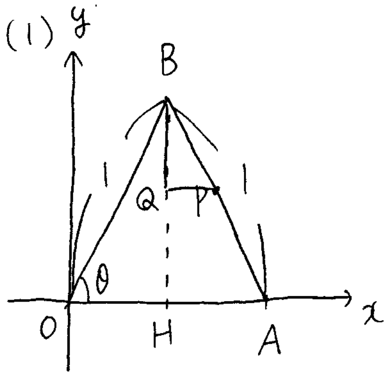
(1)



$OA = 2BP$

求める図は左のようになる。$\triangle BOA$は二等辺三角形。Bからx軸に下ろした垂線とx軸との交点をHとする。

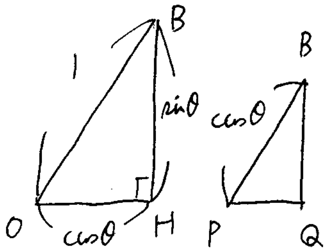
$OH = \cos\theta$ より Aのx座標は $2\cos\theta$

よって $\underline{A(2\cos\theta,\ 0)}$

$OA = 2BP$ より $BP = \cos\theta$

PからBHに下ろした垂線をPQとすると

$\triangle BOH \backsim \triangle BPQ$ である。



$BO : BP = OH : PQ$ より

$1 : \cos\theta = \cos\theta : PQ$

$PQ = \cos^2\theta$

よって Pのx座標は

$OH + PQ = \cos\theta + \cos^2\theta$

また $BO : BP = BH : BQ$ より

$1 : \cos\theta = \sin\theta : BQ$

$BQ = \sin\theta\cos\theta$

Pのy座標は

$BH - BQ = \sin\theta - \sin\theta\cos\theta$

よって

$\underline{P(\cos\theta + \cos^2\theta,\ \sin\theta - \sin\theta\cos\theta)}$

(2)
$$\begin{cases} x = \cos\theta + \cos^2\theta \\ y = \sin\theta - \sin\theta\cos\theta \end{cases} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

$0 \leqq x \leqq 2$
$0 \leqq y \leqq 1$ より

の長さを求める

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta + 2\cos\theta\cdot(-\sin\theta)$$
$$= -\sin\theta - \sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$
$$= \cos\theta - \cos 2\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$
$$= (-\sin\theta - \sin 2\theta)^2 + (\cos\theta - \cos 2\theta)^2$$
$$= \sin^2\theta + 2\sin 2\theta\sin\theta + \sin^2 2\theta$$
$$+ \cos^2\theta - 2\cos 2\theta\cos\theta + \cos^2 2\theta$$
$$= 2 + 2\sin 2\theta\sin\theta - 2\cos 2\theta\cos\theta$$

積↓和

$$= 2 - (\cos 3\theta - \cos\theta) - (\cos 3\theta + \cos\theta)$$
$$= 2 - \cos 3\theta + \cos\theta - \cos 3\theta - \cos\theta$$
$$= 2 - 2\cos 3\theta$$

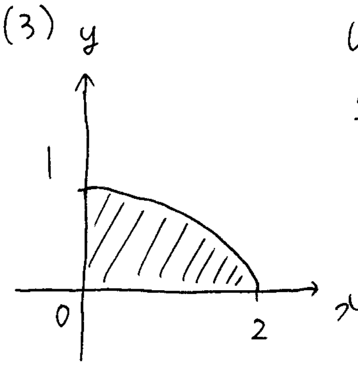
よって

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\cos 3\theta}\, d\theta$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos 3\theta}\, d\theta$$

半角を利用

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sin\frac{3}{2}\theta\, d\theta$$
$$= 2\left[-\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2\left(-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) = \underline{\frac{4 + 2\sqrt{2}}{3}}$$

(3)



$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ では

$\frac{dx}{d\theta} < 0$. $\frac{dy}{d\theta} > 0$

より求める図形の面積は図の斜線部分である

したがって.

$$S = \int_0^2 y\,dx \quad \cdots \quad (*)$$

$x = \cos\theta + \cos^2\theta$ とすると

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta - \sin 2\theta$$

x	$0 \to 2$
θ	$\frac{\pi}{2} \to 0$

よって

$$(*) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin\theta - \sin\theta\cos\theta)\cdot(-\sin\theta - \sin 2\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)(\sin\theta + \sin 2\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\sin\theta - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) - \frac{1}{4}(\cos 3\theta - \cos\theta) - \frac{1}{4}(1-\cos 4\theta)\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{1}{4}\cos 4\theta\right)d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{12}\sin 3\theta + \frac{1}{16}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \underline{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{3}}$$