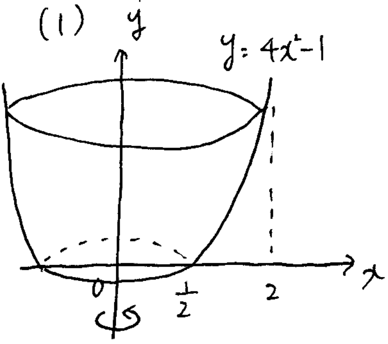
(1)



できる容器は図のようになる。

10秒後のときの水面の高さをhとすると

$$V = \pi \int_0^h x^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^h \frac{y+1}{4} \, dy$$

$$= \pi \left[\frac{1}{8} y^2 + \frac{1}{4} y \right]_0^h$$

$$= \left(\frac{1}{8} h^2 + \frac{1}{4} h \right) \pi$$

毎秒πより

10秒では10π

これが10πと等しくなるので

$$\left(\frac{1}{8} h^2 + \frac{1}{4} h \right) \pi = 10\pi$$

$$h^2 + 2h - 80 = 0$$

$$(h-8)(h+10) = 0$$

$h > 0$ より $\underline{h = 8}$

(2) $\dfrac{dh}{dt}$ を求める。

$V = \left(\frac{1}{8} h^2 + \frac{1}{4} h \right) \pi$ より

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{\left(\frac{1}{4} h + \frac{1}{4} \right) \pi \cdot \frac{dh}{dt}}_{\text{合成関数としてみる}}$$

↑

体積の増え方はπ

よって

$$\pi = \left(\frac{1}{4} h + \frac{1}{4} \right) \pi \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{h+1}$$

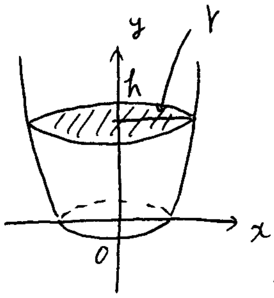
(1) より $h = 8$ なので

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{8+1} = \underline{\frac{4}{9}}$$

右上へ

(3) 水面の面積をSとすると

$\dfrac{dS}{dt}$ を求めればよい。



高さhのときの水面の面積は、半径をrとすると

$$S = \pi r^2$$

また、(r, h) は $y = 4x^2 - 1$ 上の点より

$$h = 4r^2 - 1$$

$$r^2 = \frac{h+1}{4}$$

よって $S = \pi \cdot \dfrac{h+1}{4}$

$$\frac{dS}{dt} = \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{dh}{dt}$$

(2) より $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{4}{9}$ なので

$$\frac{dS}{dt} = \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} = \underline{\frac{\pi}{9}}$$