(1) $C_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}x\,(\sin x)'\,dx$

$$= \underbrace{\left[\cos^{n+1}x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^{n}x\,(-\sin^2 x)\,dx$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n}x\,(1-\cos^2 x)\,dx$$

$$= (n+1)(C_n - C_{n+2})$$

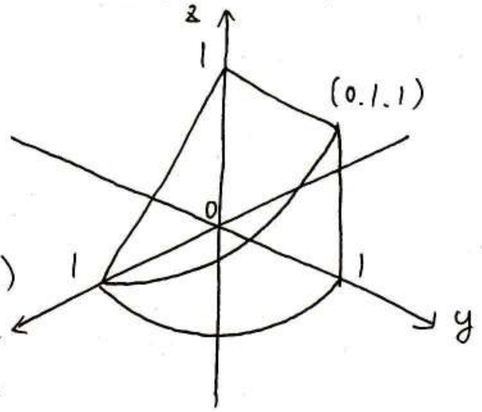
よって　$C_{n+2} = (n+1)(C_n - C_{n+2})$　　$\underline{C_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}C_n}$

(2) 仮定より、x, y, z の領域は

$0 \leqq x \leqq 1$、$0 \leqq y \leqq 1$、$0 \leqq z \leqq 1$ となる。

したがって求める立体は

右図のようになる。

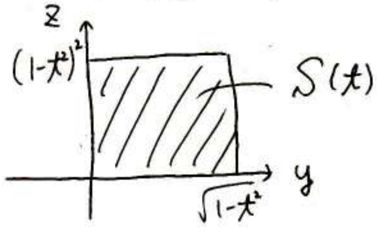


$x = t$ で切ったときの

y-z平面を考えると $(0 \leqq t \leqq 1)$

$$t^2 + y^2 \leqq 1 \Rightarrow y \leqq \sqrt{1-t^2}$$

$$z + 2t^2 - t^4 \leqq 1 \Rightarrow z \leqq (1-t^2)^2$$



断面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = \sqrt{(1-t^2)^5}$$

よって体積は $V = \int_0^1 \sqrt{(1-t^2)^5}\,dt = (*)$

$t = \sin\theta$ とおくと

$dt = \cos\theta\,d\theta$

t	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$$(*) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\sin^2\theta)^5}\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\,d\theta = C_6$$

$$= \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\theta} = \underline{\frac{5}{32}\pi}$$