(1) 点Pのx座標をpとおく.

C_1とC_2の$x=p$でのy座標は等しいので

$$ap^3 = p\log p \quad \cdots ①$$

$x=p$における接線の傾きは等しいので

$$3ap^2 = \log p + 1 \quad \cdots ②$$

①より $ap^2 = \log p$ を②に代入

$$3\log p = \log p + 1$$

$$\log p = \frac{1}{2} \qquad p = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

また $ae = \frac{1}{2}$ より $\underline{a = \frac{1}{2e}}$

$$\underline{P\left(\sqrt{e},\ \frac{1}{2}\sqrt{e}\right)}$$

(2) $x \geqq 1$のとき

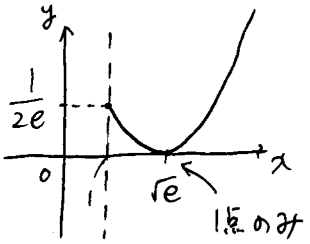
$f(x) = \frac{1}{2e}x^2 - \log x$ が $x=\sqrt{e}$で

極小になっていることを示せばよい.

$$f'(x) = \frac{1}{e}x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-e}{ex}$$

$f'(x)=0$ となるxは $x=\sqrt{e}$

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2e}$	↘	0	↗



したがって, C_1とC_2はP以外に

共有点をもたない.

(本当は

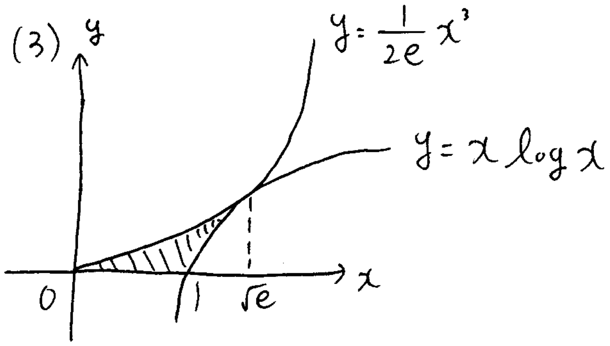
$$g(x) = \frac{1}{2e}x^3 - x\log x$$

となるが, $x \geqq 1$なので

$$g(x) = x\underbrace{\left(\frac{1}{2e}x^2 - \log x\right)}_{f(x)}$$

と考えてもよい.)

(3)



求める面積は図の斜線部分

よって,

$$S = \int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{2e}x^3\,dx - \int_1^{\sqrt{e}} x\log x\,dx$$

$$= \frac{1}{2e}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx$$

$$= \frac{1}{2e}\cdot\frac{e^2}{4} - \left\{\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{2}x^{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{8}e - \frac{1}{4}e + \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{e}} x\,dx$$

$$= -\frac{1}{8}e + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= -\frac{1}{8}e + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{8}e + \frac{1}{4}e - \frac{1}{4}$$

$$= \underline{\frac{1}{8}e - \frac{1}{4}}$$