(1) $f(x) = x^2e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt$

$\underline{f(0) = 0.}$

$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} - e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$

$+ e^{-x}\cdot \underbrace{e^x f(x)}_{\frac{d}{dx}\int_0^x e^t f(t)\,dt}$

$= 2xe^{-x} - x^2e^{-x} - e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt + f(x)$ …(*)

よって

$\underline{f'(0) = 0}$

(2) (*) より

$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} - e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt$

$+ x^2e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$

$\underline{= 2xe^{-x}}$

(3) $f(x) = \int 2xe^{-x}dx$

$= 2\int x(-e^{-x})'dx$

$= -2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx$

$= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$

$f(0) = 0$ より

$-2 + C = 0 \qquad C = 2$

よって

$\underline{f(x) = -2e^{-x}(x+1) + 2}$