(1) C_a 上の点 (t, ae^t) における接線の方程式は

$$y = ae^t x - ae^t(t-1) \quad \cdots ①$$

① と C を連立した方程式の解が重解になればよい.

$$x^2 = ae^t x - ae^t(t-1)$$

$$x^2 - ae^t x + ae^t(t-1) = 0 \quad \cdots (*)$$

$(*)$ の判別式が 0 になればよい.

$$D = (-ae^t)^2 - 4ae^t(t-1) = 0$$

$$a^2e^{2t} - 4ae^t(t-1) = 0$$

$$ae^t - 4(t-1) = 0$$

$$a = \frac{4(t-1)}{e^t}$$

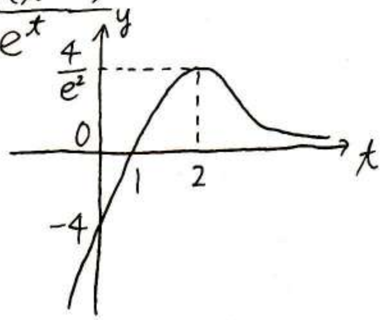
これを $y = \frac{4(t-1)}{e^t}$ と $y = a$ $(a>0)$ のグラフの共有点としてみる

$f(t) = \frac{4(t-1)}{e^t}$ とおくと $f'(t) = \frac{-4(t-2)}{e^t}$

t	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

$\lim_{t\to\infty} \frac{4(t-1)}{e^t} = 0$

よりグラフは右図



したがって,

$\frac{4}{e^2} < a$ のとき 0 本, $a = \frac{4}{e^2}$ のとき 1 本, $0 < a < \frac{4}{e^2}$ のとき 2 本

---

(2) $y = x^2$ と $y = \frac{4}{e^2}e^x$ の共有点が 2 点となることを示す.

$$x^2 = \frac{4}{e^2}e^x$$

$$\frac{x^2}{e^x} = \frac{4}{e^2}$$

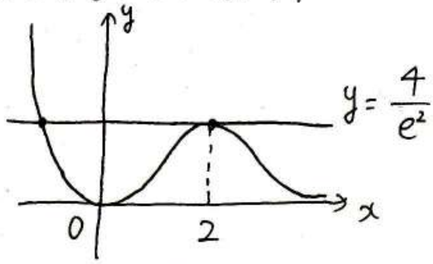
$g(x) = \frac{x^2}{e^x}$ とおくと

$$g'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

よってグラフは右図



したがってグラフより,

C と C_a の共有点は 2 点