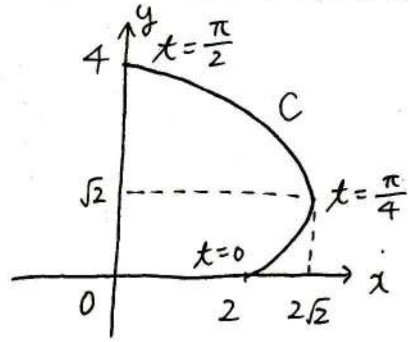
(1) $\dfrac{dx}{dt} = -3\sin t + \sin 3t \cdot 3$　　$\dfrac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t$

$= 6\sin t\,(1-2\sin^2 t)$　　　　$= 12\cos t\,(1-\cos^2 t)$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	/	$+$	0	$-$	/
x	2	$\rightarrow$	$2\sqrt{2}$	$\leftarrow$	0
$\frac{dy}{dt}$	/	$+$	$+$	$+$	/
y	0	$\uparrow$	$\sqrt{2}$	$\uparrow$	4
(x,y)	$(2,0)$	$\nearrow$	$(2\sqrt{2},\sqrt{2})$	$\nwarrow$	$(0,4)$

よってグラフは以下のようになる.



(2) $S = \displaystyle\int_0^4 x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{dy}{dt}\,dt$

y	$0 \rightarrow 4$
t	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t - \cos 3t)(3\cos t - 3\cos 3t)\,dt$

$= 3\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\cos^2 3t - 4\cos t\cos 3t + 3\cos^2 t)\,dt}_{(*)}$

ここで,

$\cos^2 3t = \dfrac{1+\cos 6t}{2}$, $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$, $\cos t\cos 3t = \dfrac{1}{2}(\cos 4t + \cos 2t)$

であることに注意すると

$(*) = 3\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1+\cos 6t}{2} - 2(\cos 4t + \cos 2t) + 3\cdot\frac{1+\cos 2t}{2} \right\} dt$

$= 3\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos 6t - 2\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 2t + 2 \right) dt$

$= 3\left[\dfrac{1}{12}\sin 6t - \dfrac{1}{2}\sin 4t - \dfrac{1}{4}\sin 2t + 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 3\cdot\pi = \underline{3\pi}$

(1)では

$\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$

$\cos 3t = -3\cos t + 4\cos^3 t$

を使った