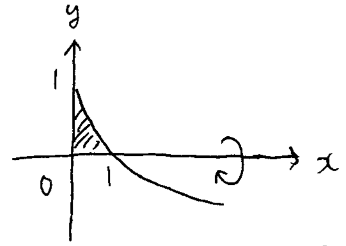
1. (1) $y = 1 - \sqrt{x}$, $x = 0$、x軸



求める体積は
図の斜線部分を
x軸で回転させたもの

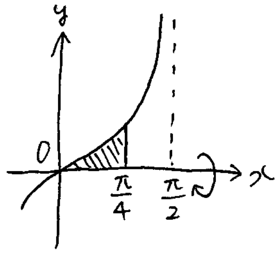
よって $V = \pi \int_0^1 (1-\sqrt{x})^2 dx$

$= \pi \int_0^1 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx$

$= \pi \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + x \right]_0^1$

$= \underline{\frac{\pi}{6}}$

(2) $y = \tan x$, $x = \frac{\pi}{4}$, x軸



求める体積は
図の斜線部分を
x軸で回転させたもの

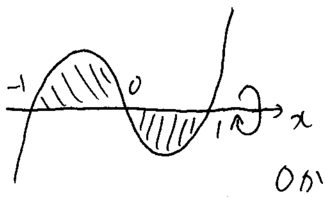
よって $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx$

$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$

$= \pi \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \underline{\pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)}$

(3) $y = x^3 - x$、x軸



求める体積は図の
斜線部分をx軸で回転
させたもの. -1から0と
0から1で同じ立体になるので

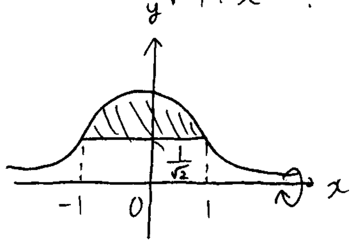
$V = 2\pi \int_0^1 (x^3 - x)^2 dx$

$= 2\pi \int_0^1 (x^6 - 2x^4 + x^2) dx$

$= 2\pi \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$

$= \underline{\frac{16}{105}\pi}$

(4) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$



求める体積は
図の斜線部分を
x軸で回転させたもの

よって

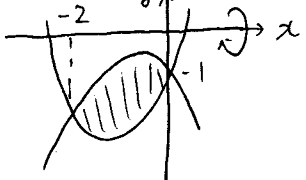
$V = \pi \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} - \pi \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 dx$

$= 2\pi \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \pi$

$x = \tan\theta$と置換すると $\frac{\pi}{4}$

$= 2\pi \cdot \frac{\pi}{4} - \pi = \underline{\frac{\pi^2}{2} - \pi}$

(5) $y = x^2 + 3x - 1$, $y = -x^2 - x - 1$



求める体積は図の
斜線部分をx軸で回転
させたもの.
よって

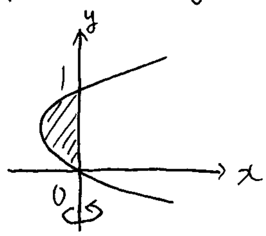
$V = \pi \int_{-2}^0 (x^2 + 3x - 1)^2 dx - \pi \int_{-2}^0 (-x^2 - x - 1)^2 dx$

$= \pi \int_{-2}^0 (2x^2 + 4x) \cdot (2x - 2) dx$

$= 4\pi \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx$

$= 4\pi \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-2}^0 = \underline{\frac{32}{3}\pi}$

2. (1) $x = y^2 - y$, y軸



求める体積は図の
斜線部分をy軸で
回転させたもの.
よって

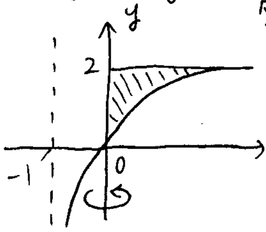
$V = \pi \int_0^1 (y^2 - y)^2 dy$

$= \pi \int_0^1 (y^4 - 2y^3 + y^2) dy$

$= \pi \left[\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{3}y^3 \right]_0^1$

$= \underline{\frac{1}{30}\pi}$

(2) $y=\log(1+x)$, $y=2$, y軸



$\Updownarrow$

$1+x=e^y$

$x=e^y-1$

求める体積は図の斜線部分をy軸で回転させたもの.

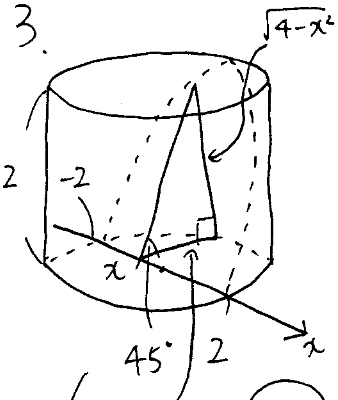
よって $V=\pi\int_0^2(e^y-1)^2dy$

$=\pi\int_0^2(e^{2y}-2e^y+1)dy$

$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}-2e^y+y\right]_0^2$

$=\underline{\pi\left(\frac{1}{2}e^4-2e^2+\frac{7}{2}\right)}$

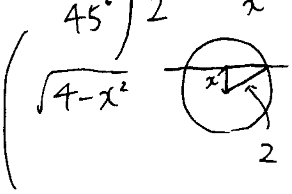
3.



求める立体の体積は図の右側部分

断面積は

$S(x)=\frac{1}{2}(4-x^2)$



(上からみると このようになるので 底辺の長さは $\sqrt{4-x^2}$)

したがって体積は

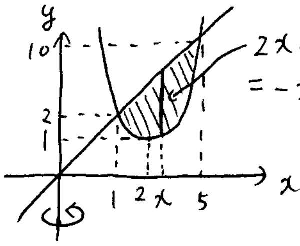
$V=\int_{-2}^2 S(x)dx$

$=\int_{-2}^2\frac{1}{2}(4-x^2)dx$

$=\int_0^2(4-x^2)dx$

$=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\underline{\frac{16}{3}}$

(3) $y=x^2-4x+5$, $y=2x$



$2x-(x^2-4x+5)$

$=-x^2+6x-5$

求める体積は図の斜線部分をy軸で回転させたもの.

バームクーヘン積分を用いると

$V=2\pi\int_1^5 x(-x^2+6x-5)dx$

$=2\pi\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-\frac{5}{2}x^2\right]_1^5$

$=\underline{64\pi}$

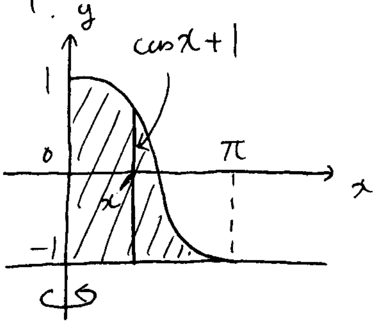
(普通に解く場合は $y=x^2-4x+5$ をxについて解いて $x=2\pm\sqrt{y-1}$ なので

$V=\pi\int_1^{10}(2+\sqrt{y-1})^2dy$

$-\pi\int_1^2(2-\sqrt{y-1})^2dy-\pi\int_2^{10}\left(\frac{y}{2}\right)^2dy$

を計算しても求まる.)

4.



求める体積は図の斜線部分をy軸で回転させたもの

よって, バームクーヘン積分を用いると

$V=2\pi\int_0^\pi x(\cos x+1)dx$

$=2\pi\int_0^\pi x(\sin x+x)'dx$

$=2\pi\left\{\left[x(\sin x+x)\right]_0^\pi-\int_0^\pi(\sin x+x)dx\right\}$

$=2\pi\left[x(\sin x+x)+\cos x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^\pi$

$=\underline{\pi^3-4\pi}$

普通に解く場合, $V=\pi\int_{-1}^1 x^2dy$ を

$y=\cos x$ で置換し. $\left(dy=-\sin x,\ \begin{array}{c|c} y & -1\to1 \\ \hline x & \pi\to0\end{array}\right)$

$V=\pi\int_\pi^0 x^2(-\sin x)dx$

$=\pi\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$ を解いても求まる