1. (1) $1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 7 + \cdots + n(2n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$

(i) $n=1$ のとき 左辺 $= 1\cdot 3 = 3$、右辺 $= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 9 = 3$

となり成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定。すなわち、

$$1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 7 + \cdots + k(2k+1) = \frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)$$

$n=k+1$ のとき

$$1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 7 + \cdots + k(2k+1) + (k+1)(2k+3)$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(4k+5) + (k+1)(2k+3)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\{k(4k+5) + 6(2k+3)\}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(4k^2+17k+18)$$

省略してもよい

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+9) = \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)+5\}$$

よって、成り立つ。

(i)、(ii) より、すべての自然数 n について成り立つ。

(2) $4n^3 - n$: 3の倍数

(i) $n=1$ のとき、 $4-1=3$ となり成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定。すなわち、

$$4k^3 - k = 3m \quad (m: 整数)$$

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} 4(k+1)^3 - (k+1) &= 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4 - k - 1 \\ &= 4k^3 - k + 12k^2 + 12k + 3 \\ &= 3m + 12k^2 + 12k + 3 \\ &= 3(m + 4k^2 + 4k + 1) \end{aligned}$$

よって、3の倍数

(i)、(ii) より、すべての自然数 n について成り立つ。

(3) $1+2\cdot\frac{3}{2}+3\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots+n\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=2(n-2)\left(\frac{3}{2}\right)^n+4$

(i) $n=1$ のとき、左辺 $=1$. 右辺 $=2\cdot(-1)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+4=1$
となり成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定. すなわち、

$$1+2\cdot\frac{3}{2}+3\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots+k\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=2(k-2)\left(\frac{3}{2}\right)^k+4$$

$n=k+1$ のとき

$$1+2\cdot\frac{3}{2}+3\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots+k\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}+(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$=2(k-2)\left(\frac{3}{2}\right)^k+4+(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^k\left\{2(k-2)+(k+1)\right\}+4$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot3(k-1)+4=\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot\frac{3}{2}\cdot2(k-1)+4$$

$$=2(k-1)\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}+4=2\left\{(k+1)-2\right\}\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}+4$$

よって成り立つ

(i), (ii) より. すべての自然数 n について成り立つ.

2. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2<\frac{(n+1)^3}{3}$

(i) $n=1$ のとき. 左辺 $=1$. 右辺 $=\frac{2^3}{3}=\frac{8}{3}$ となり成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定. すなわち、

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2<\frac{(k+1)^3}{3}$$

$n=k+1$ のとき. 左辺 $=1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$. 右辺 $=\frac{(k+2)^3}{3}$

左辺 − 右辺 $=\frac{(k+2)^3}{3}-\left\{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\right\}$

$$=\frac{(k+2)^3}{3}-(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2)-(k+1)^2$$

$$>\frac{(k+2)^3}{3}-\frac{(k+1)^3}{3}-(k+1)^2$$

$$=\frac{(k^3+6k^2+12k+8)-(k^3+3k^2+3k+1)-(3k^2+6k+3)}{3}$$

$$=\frac{3k+4}{3}>0$$ よって成り立つ

(i), (ii) より、すべての自然数 n について成り立つ.