1. (1) $\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3k-2} - \dfrac{1}{3k+1}\right)$ を利用する

$$S = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3n}{3n+1} = \underline{\frac{n}{3n+1}}$$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} = \dfrac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{(2k-1) - (2k+1)} = \dfrac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{-2}$ より

$\dfrac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}\right)$ となるのでこれを利用する

$$S = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{1}) + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \cdots + \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{1} + \sqrt{2n+1}\right) = \underline{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2n+1} - 1\right)}$$

(3) $\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{k^2+2k+1-k^2}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$ より

$\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$ となるのでこれを利用する

$$S = \frac{3}{1^2\cdot 2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \frac{7}{3^2\cdot 4^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \underline{\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}}$$

(4)
$$S = 1\cdot 1 + 2\cdot 5 + 3\cdot 5^2 + \cdots + (n-1)\cdot 5^{n-2} + n\cdot 5^{n-1}$$
$$-)\ 5S = \qquad 1\cdot 5 + 2\cdot 5^2 + \cdots + (n-2)\cdot 5^{n-2} + (n-1)\cdot 5^{n-1} + n\cdot 5^n$$
$$-4S = \underbrace{1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-2} + 5^{n-1}}_{\text{初項1, 公比5, 項数}n\text{の等比数列の和}} - n\cdot 5^n$$
$$= \frac{5^n-1}{5-1} - n\cdot 5^n = \frac{5^n - 1 - 4n\cdot 5^n}{4}$$

よって、
$$S = \frac{-5^n + 1 + 4n\cdot 5^n}{16} = \underline{\frac{(4n-1)\cdot 5^n + 1}{16}}$$

(5) $S = 1 + 4x + 7x^2 + \cdots + (3n-2)x^{n-1}$

$x=1$ のとき、
$$S = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(3k-2)$$
$$= 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - 2n = \underline{\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n}$$

$x \neq 1$ のとき

$(3n-5)x^{n-2}$
$$S = 1 + 4x + 7x^2 + \cdots + (3n-2)x^{n-1}$$
$$-)\ xS = \qquad x + 4x^2 + \cdots + (3n-5)x^{n-1} + (3n-2)x^n$$
$$(1-x)S = 1 + 3x + 3x^2 + \cdots + 3x^{n-1} - (3n-2)x^n$$
$$= \underbrace{3 + 3x + 3x^2 + \cdots + 3x^{n-1}}_{\text{初項3, 公比}x\text{, 項数}n} - 2 - (3n-2)x^n$$
$$= \frac{3(1-x^n)}{1-x} - 2 - (3n-2)x^n$$

$-(3n-2)x^n$
$+(3n-2)x^{n+1}$
$$= \frac{3 - 3x^n - 2(1-x) - (1-x)(3n-2)x^n}{1-x}$$

$-3x^n - (3n-2)x^n$
$= -3x^n - 3nx^n + 2x^n$
$= -3nx^n - x^n$
$$= \frac{1 + 2x + (3n-2)x^{n+1} - (3n+1)x^n}{1-x}$$

よって
$$S = \underline{\frac{1 + 2x + (3n-2)x^{n+1} - (3n+1)x^n}{(1-x)^2}}$$

2. (1) 各群の最初の自然数を並べると

1, 2, 4, 8, 16, … よって $\underline{2^{n-1}}$

(2) n群の初項は 2^{n-1}, $n+1$群の初項は 2^n

n群に500が入っているとすると $2^{n-1} < 500 < 2^n$ となる.

これを満たすnは $n=9$.

第9群の初項は $2^8 = 256$, 公差は1なので一般項は

$$a_n = 256 + (n-1)\times 1 = n + 255$$

$500 = n + 255$ を解いて $n = 245$. $\underline{\text{第9群の245項}}$

(3) n群の初項は 2^{n-1}, 末項 $2^n - 1$, 項数 2^{n-1} より和は

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\left(2^{n-1} + 2^n - 1\right) = 2^{n-2}\left(2^{n-1} + 2\cdot 2^{n-1} - 1\right)$$

$$= \underline{2^{n-2}\left(3\cdot 2^{n-1} - 1\right)}$$

3. 1 | 1, 4 | 1, 4, 9 | 1, 4, 9, 16 | 1, 4, 9, 16, 25 | 1, … と考える.

1群 2群 3群 4群

第100項が第n群に入っているとすると $\frac{1}{2}n(n-1) < 100 < \frac{1}{2}n(n+1)$

これより $n = 14$

第1群から$n-1$群までの個数の合計

1群からn群までの個数の合計

14群の初項は最初から数えて $\frac{1}{2}\times 14\times 13 + 1 = 92$ 項

よって100項は $\underline{81}$

また、和は

$$\underbrace{1^2 + (1^2+2^2) + (1^2+2^2+3^2) + \cdots + (1^2+2^2+3^2+\cdots+13^2)}_{\text{1群から13群までの和}} + 1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2$$

$$= \sum_{k=1}^{13}\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + \sum_{k=1}^{9}k^2$$

$$= \underline{3470}$$