1. (1) $y=2x+a$ と $x^2-y^2=1$ を連立

$x^2-(2x+a)^2=1$

$x^2-(4x^2+4ax+a^2)-1=0$

$3x^2+4ax+1+a^2=0$

この判別式を D とすると

$D=16a^2-4\cdot 3(1+a^2)$

$=4a^2-12$

異なる2点 $\Longleftrightarrow D>0$ より

$4a^2-12>0$

$a^2-3>0$

よって $\underline{a<-\sqrt{3}、\sqrt{3}<a}$

(2) 2つの式を連立させて

$4x^2+9(mx+3)^2=36$

$4x^2+9(m^2x^2+6mx+9)-36=0$

$(9m^2+4)x^2+54mx+45=0$ ……(*)

判別式を D とすると

$D=(54m)^2-4\cdot(9m^2+4)\cdot 45$

接する $\Longleftrightarrow D=0$ より

$(54m)^2-4(9m^2+4)\cdot 45=0$

$m^2=\frac{5}{9}$ 　 $\underline{m=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}}$

$m=\frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき (*)に代入すると

$9x^2+18\sqrt{5}x+45=0$

$x^2+2\sqrt{5}x+5=0$

$(x+\sqrt{5})^2=0$ 　 $x=-\sqrt{5}$

$y=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot(-\sqrt{5})+3=\frac{4}{3}$ 　 $\underline{\left(-\sqrt{5}、\frac{4}{3}\right)}$

$m=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ のときも同様に $\underline{\left(\sqrt{5}、\frac{4}{3}\right)}$

(3) 2つの式を連立させて

$y^2=-8(2-ly)$

$y^2-8ly+16=0$

判別式を D とすると

$D=(-8l)^2-4\cdot 16$

共有点をもたない $\Longleftrightarrow D<0$

$(-8l)^2-4\cdot 16<0$

$l^2-1<0$

よって $\underline{-1<l<1}$

2. 求める接線の方程式を $y=m(x-3)$ とおく

$x^2+4y^2=4$ と連立させて

$x^2+4(m^2(x-3)^2)=4$

$x^2+4m^2(x^2-6x+9)-4=0$

$(4m^2+1)x^2-24m^2x+36m^2-4=0$

$D=(-24m^2)^2-4\cdot(4m^2+1)\cdot(36m^2-4)$

$D=0$ となればよいので

$(-24m^2)^2-16(4m^2+1)(9m^2-1)=0$

$5m^2=1$ 　 $m=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

よって接線の方程式は

$y=\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{3}{\sqrt{5}}$

$\underline{y=-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{3}{\sqrt{5}}}$

3. 求める直線の方程式を $y=x+a$ とおく.

$2x^2-y^2=-2$ と連立させて

$2x^2-(x+a)^2=-2$

$2x^2-(x^2+2ax+a^2)+2=0$

$x^2-2ax-a^2+2=0$

$D=4a^2-4(-a^2+2)$

$D=0$ となればよいので

$4a^2-4(-a^2+2)=0$

$a^2-(-a^2+2)=0$

$a^2=1$

$a=\pm1$

よって $\underline{y=x+1,\ y=x-1}$

4. (1) $\dfrac{x_1x}{9}+\dfrac{y_1y}{4}=1$ に $\left(\dfrac{3}{2},\sqrt{3}\right)$ を代入して $\dfrac{1}{6}x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}y=1$

$\underline{2x+3\sqrt{3}y-12=0}$

(2) $\dfrac{x_1x}{16}-\dfrac{y_1y}{4}=1$ に $(-2\sqrt{5},1)$ を代入して $-\dfrac{\sqrt{5}}{8}x-\dfrac{1}{4}y=1$

$\underline{\sqrt{5}x+2y+8=0}$

(3) $y_1y=2(x+x_1)$ に $(1,-2)$ を代入して $-2y=2(x+1)$

$\underline{x+y+1=0}$

5. (1) 接点を (x_1,y_1) とおくと $\dfrac{x_1^2}{4}-y_1^2=1$ …①

接線の方程式 $\dfrac{x_1x}{4}-y_1y=1$ に点 $(2,3)$ を代入して

$\dfrac{1}{2}x_1-3y_1=1$

$x_1-6y_1=2$ …②

①.②より $\dfrac{(6y_1+2)^2}{4}-y_1^2=1$ これを解いて $y_1=0,\ -\dfrac{3}{4}$

$y_1=0$ のとき $x_1=2$ 接線の方程式は $\underline{x=2\quad(2,0)}$

$y_1=-\dfrac{3}{4}$ 〃 $x_1=-\dfrac{5}{2}$ 〃 $\underline{5x-6y+8=0\quad\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{4}\right)}$

(2) 接点を (x_1,y_1) とおくと $y_1^2=8x_1$ …①

接線の方程式 $y_1y=4(x+x_1)$ に $(3,5)$ 代入して $5y_1=4(x_1+3)$ …②

①.②より $y_1^2=10y_1-24$ よって $y_1=4,\ 6$

$y_1=4$ のとき $x_1=2$ 接線の方程式は $4y=4(x+2)$

$\underline{y=x+2\quad(2,4)}$

$y_1=6$ 〃 $x_1=\dfrac{9}{2}$ 〃 $6y=4\left(x+\dfrac{9}{2}\right)$

$\underline{2x-3y+9=0\quad\left(\dfrac{9}{2},6\right)}$