数学A新訂版　問題解答集　　実教出版

1章　場合の数と確率

1　場合の数

●練習 1

(1)　$-5 \in \boldsymbol{Z}$

(2)　$\dfrac{1}{2} \notin \boldsymbol{Z}$

(3)　$\sqrt{2} \notin \boldsymbol{Z}$

(4)　$0 \in \boldsymbol{Z}$

●練習 2

(1)　$\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$

(2)　$\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\cdots\}$

(3)　$\{10,\ 15,\ 20,\ \cdots\cdots,\ 90,\ 95\}$

(4)　$\{3,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots\}$

●練習 3

$A=\{1,\ 2,\ 4\}$，$B=\{1,\ 2,\ 4\}$

$C=\{2,\ 4\}$　であるから

$\boldsymbol{A=B,\ C\subset A,\ C\subset B}$

●練習 4

$\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{1,\ 2\}$，$\{1,\ 3\}$，$\{2,\ 3\}$，

$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\varnothing$

●練習 5

(1)　$\boldsymbol{A\cap B}=\{6,\ 12\}$

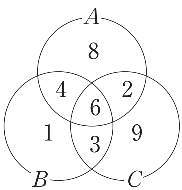
$\boldsymbol{A\cup B}=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15\}$

(2)　$\boldsymbol{A\cap B}=\varnothing$

$\boldsymbol{A\cup B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$

●練習 6

右図より



$\boldsymbol{A\cap B\cap C}=\{6\}$

$\boldsymbol{A\cup B\cup C}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$

●練習 7

(1)　$\overline{\boldsymbol{P}}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

(2)　$\overline{\boldsymbol{Q}}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

(3)　$\overline{\boldsymbol{P}}\cap\overline{\boldsymbol{Q}}=\{2,\ 4\}$

(4)　$\overline{\boldsymbol{P}}\cup\overline{\boldsymbol{Q}}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$

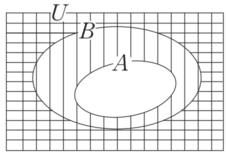
(5)　$\boldsymbol{P}\cap\overline{\boldsymbol{Q}}=\{1,\ 3\}$

(6)　$\overline{\boldsymbol{P}}\cap\boldsymbol{Q}=\{6,\ 8\}$

(7)　$\boldsymbol{P}\cup\overline{\boldsymbol{Q}}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$

(8)　$\overline{\boldsymbol{P}}\cup\boldsymbol{Q}=\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

●問 1



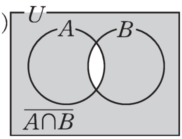
$\overline{A}$ を▥，$\overline{B}$ を▤で表すと，上の図のように，▤の部分は▥の部分に含まれているので，$\overline{B}\subset\overline{A}$。すなわち，$\overline{A}\supset\overline{B}$ が成り立つ。

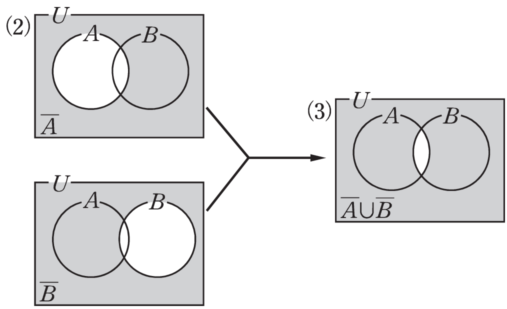
●練習 8

(1)　$\overline{A\cap B}$ を図で表す。

(2)　$\overline{A}$，$\overline{B}$ をそれぞれ図で表す。

(3)　$\overline{A}$ と $\overline{B}$ の和集合 $\overline{A}\cup\overline{B}$ を図で表す。

(1)




(1)と(3)の示す部分が一致するので

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

●練習 9

(1) $A=\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 99\}$

であるから　$\boldsymbol{n(A)=33}$

(2) $B=\{5,\ 10,\ 15,\ \cdots,\ 100\}$

であるから　$\boldsymbol{n(B)=20}$

(3) $A\cap B$ は 15 の倍数の集合で

$A\cap B=\{15,\ 30,\ 45,\ 60,\ 75,\ 90\}$

であるから　$\boldsymbol{n(A\cap B)=6}$

●練習 10

3 の倍数の集合を A, 5 の倍数の集合を B とすると

$n(A)=66,\quad n(B)=40$

また，$A\cap B$ は 15 の倍数の集合であるから

$n(A\cap B)=13$

3 の倍数または 5 の倍数であるものの集合は $A\cup B$ であるから

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=66+40-13=$**93 個**

●演習 1

$n(A)=a+d+g+f$，$n(B)=b+d+g+e$

$n(C)=c+f+g+e$

$n(A\cap B)=d+g$，$n(B\cap C)=e+g$

$n(C\cap A)=f+g$，$n(A\cap B\cap C)=g$

よって，

$n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$
$+n(A\cap B\cap C)=(a+d+g+f)+(b+d+g+e)$
$+(c+f+g+e)-(d+g)-(e+g)-(f+g)+g$
$=a+b+c+d+e+f+g=n(A\cup B\cup C)$

ゆえに，等式は成り立つ。

●演習 2

3 の倍数の集合を A，4 の倍数の集合を B，5 の倍数の集合を C とすると

$n(A)=33$，$n(B)=25$，$n(C)=20$

また，$n(A\cap B)=8$，$n(B\cap C)=5$，$n(C\cap A)=6$，$n(A\cap B\cap C)=1$　であるから

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$
$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=33+25+20-8-5-6+1=$**60 個**

●練習 11

100 以下の自然数を全体集合 U，4 の倍数の集合を A，2 の倍数の集合を B とすると

$n(U)=100,\quad n(A)=25,\quad n(B)=50$

(1) 4 の倍数でない数の個数は

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

$=100-25=$**75 個**

(2) 2 の倍数であるが，4 の倍数でない数の個数は

$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)$

$=n(B)-n(A)$

$=50-25=$**25 個**

●問 2

電車だけを利用する生徒は

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)$

$=28-11=17$

バスだけを利用する生徒は

$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)$

$=17-11=6$

よって，求める人数は

$n(A\cap\overline{B})+n(\overline{A}\cap B)$

$=17+6=$**23 人**

●練習 12

クラスの生徒全体の集合を U とし，筆記試験の合格者の集合を A，実技試験の合格者の集合を B とすると

$n(U)=40$，$n(A)=32$，$n(B)=21$，
$n(\overline{A}\cap\overline{B})=5$

(1) $n(A\cup B)=n(U)-n(\overline{A\cup B})$

$=n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B})$

$=40-5=35$

よって

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

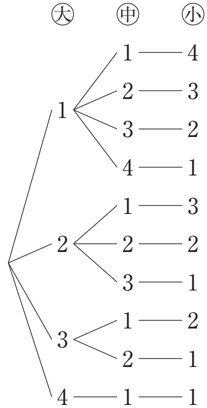
$=32+21-35=$**18 人**

(2) $n(A\cap\overline{B})+n(\overline{A}\cap B)$

$=n(A)-n(A\cap B)+n(B)-n(A\cap B)$

$=32-18+21-18=$**17 人**

●練習 13

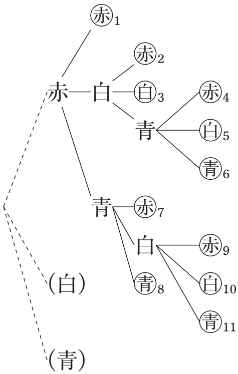


上の樹形図より，**10 通り**

●練習 14

1 回目が赤球のとき，次の図のようになる。

(○印は，終了を表す)



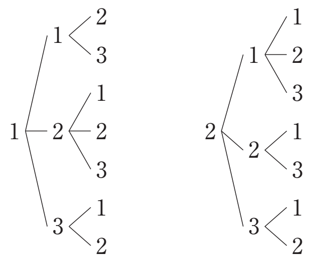
上図より，11 通り。

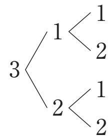
1 回目が白球，青球のときも同様になる。

よって，　$11\times3=33$　すなわち　**33 通り**

●練習 15

(1)





図より　**18 個**

(2)　(1)の図より　**213**

●練習 16

(1)　目の和が 3 になる場合は 2 通り　…①

目の和が 7 になる場合は 6 通り　…②

①，②から，和の法則より

$2+6=8$　すなわち　**8 通り**

(2)　目の和が 5 になる場合は 4 通り　…①

目の和が 10 になる場合は 3 通り　…②

①，②から，和の法則より

$4+3=7$　すなわち　**7 通り**

●練習 17

(1)　目の和が 10 になる場合は 3 通り　…①

目の和が 11 になる場合は 2 通り　…②

目の和が 12 になる場合は 1 通り　…③

①，②，③から，和の法則より

$3+2+1=6$　すなわち　**6 通り**

(2)　目の積が 12 になる場合は 4 通り　…①

目の積が 24 になる場合は 2 通り　…②

目の積が 36 になる場合は 1 通り　…③

①，②，③から，和の法則より

$4+2+1=7$　すなわち　**7 通り**

●練習 18

・大小 2 個のさいころを投げるとき

大小 2 個のさいころの目の出方はそれぞれ 6 通り。ゆえに，積の法則より

$6\times6=$**36 通り**

・大中小 3 個のさいころを投げるとき

大中小 3 個のさいころの目の出方はそれぞれ 6 通り。ゆえに，積の法則より

$6\times6\times6=$**216 通り**

●練習 19

展開をするとき，分配法則により，2 つの項 a，b のそれぞれに 3 つの項 x，y，z が乗じられて新たな項ができるから

$2\times3=$**6 個**

●練習 20

(1)　$108=2^2\times3^3$ と素因数分解でき

2^2 の約数は，1，2，2^2 の 3 個

3^3 の約数は，1，3，3^2，3^3 の 4 個

よって，108 の正の約数の個数は，積の法則より　$3\times4=$**12 個**　その和は

$(1+2+2^2)\times(1+3+3^2+3^3)=\mathbf{280}$

(2)　$400=2^4\times5^2$ と素因数分解でき

2^4 の約数は，1，2，2^2，2^3，2^4 の 5 個

5^2 の約数は，1，5，5^2 の 3 個

よって，400 の正の約数の個数は，積の法則より　$5\times3=$**15 個**　その和は

$(1+2+2^2+2^3+2^4)\times(1+5+5^2)=\mathbf{961}$

(3)　$360=2^3\times3^2\times5$ と素因数分解でき

2^3 の約数は，1，2，2^2，2^3 の 4 個

3^2 の約数は，1，3，3^2 の 3 個

5 の約数は，1，5 の 2 個

よって，360 の正の約数の個数は，積の法則より　$4\times3\times2=$**24 個**　その和は

$(1+2+2^2+2^3)\times(1+3+3^2)\times(1+5)=\mathbf{1170}$

●練習 21

(1)　${}_8P_2=8\times7=\mathbf{56}$

(2)　${}_{10}P_4=10\times9\times8\times7=\mathbf{5040}$

(3)　${}_7P_5=7\times6\times5\times4\times3=\mathbf{2520}$

●練習 22

6 人から 4 人を選んで並べると考えて

${}_6P_4=6\times5\times4\times3=$**360 通り**

●練習 23

(1)　$7!=7\times6!=7\times720=\mathbf{5040}$

(2)　$8!=8\times7!=8\times5040=\mathbf{40320}$

●問 3

女男女男女男女　と並ぶときだから

男子の並び方が　${}_3P_3$ 通り

女子の並び方が　${}_4P_4$ 通り

よって，求める並び方の総数は，

積の法則により，

${}_3P_3\times{}_4P_4=3!\times4!=$**144 通り**

●練習 24

(1)　両端の男子の並び方は　${}_3P_2$ 通り

残りの男女 4 人がこの間に並ぶ並び方は

${}_4P_4$ 通り

よって，求める並び方の総数は，積の法則により

${}_3P_2\times{}_4P_4=3\times2\times4!=$**144 通り**

(2)　女子 3 人を 1 人と考えて，4 人が 1 列に並ぶ並び方は　${}_4P_4$ 通り

これらの並び方のそれぞれに対して，隣り合う 3 人の女子の並び方は　${}_3P_3$ 通り

よって，求める並び方の総数は，積の法則により　${}_4P_4\times{}_3P_3=4!\times3!=$**144 通り**

(3)　男女男女男女の並び方は　${}_3P_3\times{}_3P_3$ 通り

女男女男女男の並び方は　${}_3P_3\times{}_3P_3$ 通り

よって，求める並び方の総数は，和の法則により　${}_3P_3\times{}_3P_3+{}_3P_3\times{}_3P_3$

$=3!\times3!+3!\times3!$

$=36+36=$**72 通り**

●練習 25

(1)　千の位の数は 0 以外だから　6 通り

百の位，十の位，一の位の並べ方は

${}_6P_3=120$ 通り

よって　$6\times120=$**720 個**

(2)　5 の倍数は一の位の数が 0 または 5 のいずれかの場合である。

一の位の数が 0 の場合

$_6P_3=120$ 通り

一の位の数が 5 の場合

$5\times{}_5P_2=100$ 通り

よって

$120+100=$**220 個**

●練習 26

$(6-1)!=5!=$**120 通り**

●練習 27

男子 3 人をひとまとめにする。

男子ひとまとめと女子 3 人の円順列は

$(4-1)!=3!$ 通り

ひとまとめにした男子 3 人の並び方は

$_3P_3=3!$ 通り

よって，求める並び方の総数は，積の法則より

$3!\times3!=$**36 通り**

●練習 28

千の位の数字は 1，2，3 のどれでもよいから 3 通りある。

また，百の位，十の位，一の位についても同様に考えて 3 通りずつある。

よって，求める整数の個数は，積の法則より

$3\times3\times3\times3=3^4=$**81 個**

●練習 29

6 個の場所の 1 つ 1 つに対して，○と×の 2 つの記号を用いることができるから

$2^6=$**64 通り**

●練習 30

6 個の場所の 1 つ 1 つに対して，○，×，△の 3 つの記号を用いることができるから

$3^6=$**729 通り**

○を少なくとも 1 個使うときは，上のうち 6 個の場所に×，△の 2 つの記号を用いる場合を除いて

$3^6-2^6=729-64=$**665 通り**

●練習 31

(1)　$_7C_2=\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}=\mathbf{21}$

(2)　$_{12}C_3=\dfrac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=\mathbf{220}$

(3)　$_5C_5=\dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\mathbf{1}$

(4)　$_8C_1=\dfrac{8}{1}=\mathbf{8}$

●練習 32

(1)　$_{10}C_9={}_{10}C_1=\dfrac{10}{1}=\mathbf{10}$

(2)　$_8C_6={}_8C_2=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}=\mathbf{28}$

(3)　$_{20}C_{17}={}_{20}C_3=\dfrac{20\cdot19\cdot18}{3\cdot2\cdot1}=\mathbf{1140}$

●練習 33

対角線の本数は，正六角形の 6 個の頂点のうち，2 個の点を結んだ線分の総数から辺になるものを除けばよいので

$_6C_2-6=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}-6=$**9 本**

●練習 34

(1)　男子 6 人から 3 人の選び方は　$_6C_3$ 通り

女子 4 人から 2 人の選び方は　$_4C_2$ 通り

よって，積の法則により

$$_6C_3\times{}_4C_2=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{4\cdot3}{2\cdot1}$$

$=$**120 通り**

(2)　10 人から 5 人の選び方は　$_{10}C_5$ 通り

5 人とも男子の選び方は　$_6C_5$ 通り

よって，少なくとも 1 人は女子が含まれる選び方は

$_{10}C_5-{}_6C_5={}_{10}C_5-{}_6C_1=252-6=$**246 通り**

●練習 35

(1)　A，B，C，D の 4 部屋に，順に 2 人ずつ生徒を選んでいけばよい。

すなわち

$${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2=\mathbf{2520}$$ **通り**

(2)　(1)でA，B，C，Dの区別をなくすと，同じものが，4!通り出てくるから

$$\frac{2520}{4!}=\mathbf{105}$$ **通り**

(3)　3人の2つの組には区別がないので

$$\frac{{}_8C_3\times{}_5C_3}{2!}\times{}_2C_2=\frac{56\cdot10}{2}\times1$$

$$=\mathbf{280}$$ **通り**

●練習 36

赤球3個の場所の選び方は ${}_9C_3$ 通り。次に，白球4個の場所の選び方は ${}_6C_4$ 通り。残りの場所には2個の黒球を入れればよいから，${}_2C_2$ 通り。

よって，求める並べ方の総数は，積の法則により

$${}_9C_3\times{}_6C_4\times{}_2C_2$$

$$=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{2\cdot1}{2\cdot1}=\mathbf{1260}$$ **通り**

(注)　黒球，赤球，白球の順(数の少ない順)に場所を選ぶと次のようにできる。

$${}_9C_2\times{}_7C_3\times{}_4C_4=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}\times\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\times1=1260$$ 通り

(別解)

3個の赤球，4個の白球，2個の黒球をすべて区別して考えると，並べ方の総数は　9!通り。

実際，赤球3個，白球4個，黒球2個の並べ方の分だけ重複してくるから

$$\frac{9!}{3!4!2!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=1260$$ 通り

●練習 37

(1)　A地点からB地点まで最短距離でいく道順の総数は，右に4区画，上に5区画進めばよいから　$\frac{9!}{4!5!}=\mathbf{126}$ **通り**

(別解)　${}_9C_4=126$ 通り

(2)　A地点からC地点まで最短距離でいく道順は，右に2区画，上に3区画進めばよいから

$$\frac{5!}{2!3!}$$ 通り

次に，C地点からB地点まで最短距離でいく道順は，右に2区画，上に2区画進めばよいから　$\frac{4!}{2!2!}$ 通り

ゆえに，積の法則から　$\frac{5!}{2!3!}\times\frac{4!}{2!2!}=\mathbf{60}$ **通り**

(別解)　${}_5C_2\times{}_4C_2=10\times6=60$ 通り

(3)　全部の道順からC地点を通る道順を除けばよいから　$126-60=\mathbf{66}$ **通り**

p.37　問題解答

1 (1) $n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

$=200-85$

$=\mathbf{115}$

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=85+60-32$

$=\mathbf{113}$

(3) $n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)$

$=60-32$

$=\mathbf{28}$

(4) $n(A\cup\overline{B})$

$=n(A)+n(\overline{B})-n(A\cap\overline{B})$

$=85+\{n(U)-n(B)\}-\{n(A)-n(A\cap B)\}$

$=85+(200-60)-(85-32)$

$=\mathbf{172}$

(5) $n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=200-113$

$=\mathbf{87}$

(6) $n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(\overline{A\cap B})$

$=n(U)-n(A\cap B)$

$=200-32$

$=\mathbf{168}$

2 $300=2^2\times3\times5^2$ と素因数分解できる。

3 の倍数の個数は，$2^2\times5^2$ の約数の個数と等しいから

$3\times3=$**9 個**

3 (1) $6\times5\times4=$**120 通り**

(2) (全体)−(目の積が奇数)　と考える。

大中小 3 個のさいころの目の出方は

$6^3=216$ 通り

目の積が奇数になるのは，3 個のさいころの目がすべて奇数のときだから　$3^3=27$ 通り

よって　$216-27=$**189 通り**

4 (1) 4 つの母音を 1 つの文字と考えて，全体で 4 つの文字を並べる並べ方は　${}_4P_4=24$ 通り

この並べ方のそれぞれに対して，4 つの母音の並べ方は　${}_4P_4=24$ 通り

よって　$24\times24=$**576 通り**

(2) 母音の並べ方は　${}_4P_4=24$ 通り

子音の並べ方は　${}_3P_3=6$ 通り

よって　$24\times6=$**144 通り**

(3) (全体)−(両端とも母音)のときだから

${}_7P_7-{}_4P_2\times{}_5P_5=5040-1440$

$=$**3600 通り**

(4) 4 つの母音を並べてスキマと両端の 5 か所に 3 つの子音を並べればよいから

${}_4P_4\times{}_5P_3=24\times60=$**1440 通り**

5 横の平行線 2 本と斜めの平行線 2 本で平行四辺形が 1 つ決まるから

横の平行線 2 本の選び方は　${}_4C_2=6$ 通り

斜めの平行線 2 本の選び方は　${}_5C_2=10$ 通り

よって，求める平行四辺形の個数は

$6\times10=$**60 個**

6 (1) 正八角形の 8 個の頂点のうち，2 点を結んだ線分から，辺になるものを除けばよいので

$${}_8C_2-8=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}-8=20\text{ 本}$$

よって，$\boxed{\text{アイ}}=\mathbf{20}$

(2) 正八角形の 8 個の頂点のうち，どの 3 点も同じ直線上にないから，3 点で三角形が 1 個できる。

よって，正八角形の頂点のうちの 3 個を頂点とする三角形の個数は

$${}_8C_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56\text{ 個}$$

したがって，$\boxed{\text{ウエ}}=\mathbf{56}$

そのうち，正八角形と 2 辺を共有するものは，

8 個

正八角形と 1 辺を共有するものは，

1 つの辺について 4 個ずつで　$8\times4=32$ 個

よって，正八角形と辺を共有しない三角形の個数は

$56-(8+32)=16$ 個

したがって，$\boxed{\text{オカ}}$ $=\mathbf{16}$

$\boxed{7}$ (1)　9 人から 4 人を 1 組として選ぶ選び方は，${}_9C_4$ 通りあり，そのそれぞれに，残り 5 人から 3 人を 2 組目として選ぶ選び方は，${}_5C_3$ 通りあり，残りを 3 組目とすればよいから，積の法則より

${}_9C_4\times{}_5C_3\times{}_2C_2=\mathbf{1260}$ **通り**

(2)　A，B，C の部屋に，順に 3 人ずつ生徒を選んでいけばよい。すなわち

${}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3=\mathbf{1680}$ **通り**

(3)　(2)で，A，B，C の区別をなくすと，同じものが，3! 通り出てくるから

$\dfrac{1680}{3!}=\mathbf{280}$ **通り**

(4)　A の部屋に 5 人，B，C の部屋に 2 人ずつ生徒を入れると考えると

${}_9C_5\times{}_4C_2\times{}_2C_2=756$ 通り

ここで，B，C の区別をなくすと，同じものが 2! 通り出てくるから　$\dfrac{756}{2!}=\mathbf{378}$ **通り**

●演習 1

$${}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}$$

$=\mathbf{120}$ **通り**

(別解)　7 個の「○」と 3 個の「｜」を 1 列に並べる順列(同じものを含む順列)と考えて

$\dfrac{(7+3)!}{7!3!}=\dfrac{10!}{7!3!}=120$ 通り

●演習 2

3 種類の文字から，重複を許して 7 個取り出す組に対応するから

$${}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}=\mathbf{36}\text{ 個}$$

(別解)

7 個の「○」と 2 個の「｜」を 1 列に並べる順列(同じものを含む順列)と考えて

$\dfrac{(7+2)!}{7!2!}=\dfrac{9!}{7!2!}=36$ 個