練習21　A ($1+5i$)，B ($7-i$)

(1)　線分ABを ① : $\boxed{2}$ に内分する点Cを表す複素数は

$$\frac{\boxed{2}(1+5i)+①(7-i)}{①+\boxed{2}}=\frac{9+9i}{3}=3+3i$$

(2)　線分ABの中点Mを表す複素数は

$$\frac{(1+5i)+(7-i))}{2}=\frac{8+4i}{2}=4+2i$$

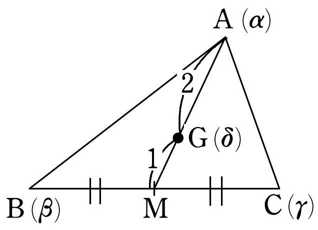
(3)　線分ABを　3 : 2　に外分する点Dを表す複素数は

③ : ($\boxed{-2}$) に内分と考える！

$$\frac{\boxed{-2}\,(1+5i)+③\,(7-i)}{③+(\boxed{-2})}=\frac{19-13i}{1}=19-13i$$

練習22　辺BCの中点をMとすると，Mを表す複素数は

$$\frac{\beta+\gamma}{2}$$



よって，A (α)，M $\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$ であるから，

中線AMを ② : $\boxed{1}$ に内分する点Gを表す複素数 δ は

$$\frac{\boxed{1}\cdot\alpha+②\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{②+\boxed{1}}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$　終

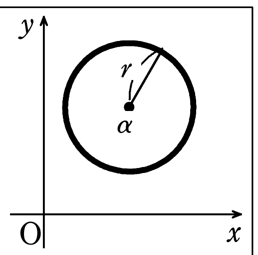
ちなみに…
　α，β，γ，δ はギリシア文字の小文字で，
　α（アルファ），β（ベータ），γ（ガンマ），δ（デルタ）と読みます。
　↑ a（エー）ではない！　　↑ r（アール）ではない！

練習23

方程式　$|z-\alpha|=\boxed{r}$ を満たす点 z 全体は

　点 α を中心とする半径 $\boxed{r}$ の円

である。



(1)　$|z|=2$

　すなわち　$|z-⓪|=\boxed{2}$ であるから

　　点⓪を中心とする半径 $\boxed{2}$ の円

　点0は原点のことであるから

　　原点を中心とする半径2の円

(2)　$|z-i|=\boxed{1}$

　　点 i を中心とする半径 $\boxed{1}$ の円

(3)　$|z+1|=4$

　すなわち　$|z-(-1)|=\boxed{4}$ であるから

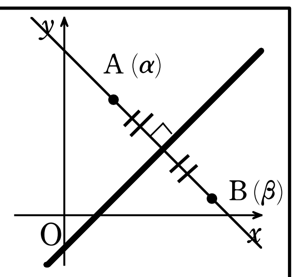
　　点 -1 を中心とする半径 $\boxed{4}$ の円

練習24

方程式　$|z-\alpha|=|z-\boxed{\beta}|$ を満たす点 z 全体は

　2点A (α)，B ($\boxed{\beta}$)を
　結ぶ線分ABの垂直二等分線

である。



(1)　$|z-②|=|z-\boxed{4i}|$

　　2点A (②)，B ($\boxed{4i}$)を結ぶ線分ABの垂直二等分線

(2)　$|z|=|z+1|$

　すなわち　$|z-⓪|=|z-(\boxed{-1})|$ であるから

　　2点O (⓪)，A ($\boxed{-1}$)を結ぶ線分OAの垂直二等分線

ちなみに…
　点のアルファベットについては、特にきまりはない。
　例えば上の(1)において
　　2点P(2)，Q ($4i$)を結ぶ線分PQの垂直二等分線
　のようにA，B以外を用いても答えても正解である。

練習25　方程式 $2|z-3|=|z|$ を満たす点 z 全体は，どのような図形か。

練習23，練習24のように
　① $|z-\alpha|=r$
　② $|z-\alpha|=|z-\beta|$
といったわかりやすい形であれば，どのような図形かすぐにわかるが，
今回の問題は①，②のいずれでもないため、すぐに答えはわからない…。
→方程式を変形し，①または②の形にする！

方程式の両辺を2乗すると

$$(2|z-3|)^2=|z|^2$$

$$4|z-3|^2=|z|^2$$

両辺とも，教科書 p.13 の公式 $|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$ を利用！

$$4(z-3)\overline{(z-3)}=z\overline{z}$$

教科書 p.12 の公式　$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$　より
　左辺の　$\overline{z-3}=\overline{z}-\overline{3}$
　　　　　$=\overline{z}-3$

$$4(z-3)(\overline{z}-3)=z\overline{z}$$

$$4(z\overline{z}-3z-3\overline{z}+9)=z\overline{z}$$

$$3z\overline{z}-12z-12\overline{z}+36=0$$

$$z\overline{z}-4z-4\overline{z}+12=0$$

----- 部分の変形について
　$z\overline{z}+○z+○\overline{z}=(z+○)(\overline{z}+○)-○^2$
を覚えておくと便利！

$$(z-4)(\overline{z}-4)-4^2+12=0$$

$$(z-4)(\overline{z}-4)=4$$

$$(z-4)\overline{(z-4)}=4$$

$$|z-4|^2=4$$

再び，教科書 p.13 の公式 $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$ を利用！

よって　$|z-4|=2$

したがって，点4を中心とする半径2の円

練習26　点 z は原点 O を中心とする半径 1 の円上の点であるから,

$$|z|=1 \quad \cdots ①$$

$w=i(z-2)$ を変形して $z=$ 　の形にし,
①に代入することで w に関する方程式を導く！

$w=i(z-2)$ より

$$w=iz-2i$$

$$-iz=-w-2i$$

$$z=\frac{-w-2i}{-i}$$

$$z=\frac{w+2i}{i}$$

これを①に代入すると

$$\left|\frac{w+2i}{i}\right|=1$$

教科書 p.17 の公式 $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ を利用！

$$\frac{|w+2i|}{|i|}=1$$

$|i|=\sqrt{0^2+1^2}=\sqrt{1}=1$

$$\frac{|w+2i|}{1}=1$$

$$|w+2i|=1$$

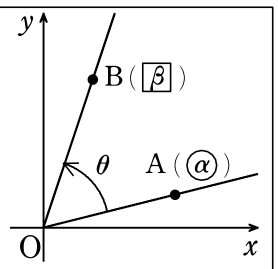
$$|w-(-2i)|=1$$

よって，点 $-2i$ を中心とする半径 1 の円

練習27　異なる 3 点 O，A (α)，B ($\boxed{\beta}$) について,
半直線 OA から半直線 OB までの回転角を θ とすると,

$$\theta=\arg\frac{\boxed{\beta}}{\alpha}$$

$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の偏角 という意味



今回の問題では　O，A ($-1+2i$)，B ($\boxed{1+3i}$)

$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を計算し，極形式に直せば θ を求められる！

$\alpha=-1+2i,\quad \beta=1+3i$ とすると

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\boxed{1+3i}}{-1+2i}$$

$$=\frac{(1+3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}$$

$$=\frac{-1-2i-3i-6i^2}{(-1)^2-(2i)^2}$$

$$=\frac{5-5i}{5}$$

$$=1-i$$

$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\boxed{-\frac{\pi}{4}}\right)+i\sin\left(\boxed{-\frac{\pi}{4}}\right)\right\}$$

極形式に直す！

よって

$$\theta=\arg\frac{\beta}{\alpha}=\boxed{-\frac{\pi}{4}}$$

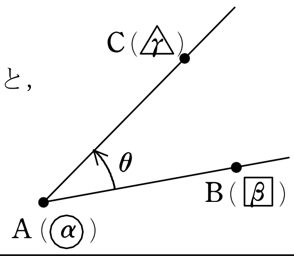
注意

$\dfrac{\beta}{\alpha}=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$
と変形しても等式としては正しいが,
今回の問題では，「 $-\pi<\theta\leqq\pi$ 」と指定があるため,
$\theta=\dfrac{7}{4}\pi$ と答えてしまうと不正解。

練習28

異なる 3 点 A (α)，B ($\boxed{\beta}$)，C (γ) について,
半直線 AB から半直線 AC までの回転角を θ とすると,

$$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\boxed{\beta}-\alpha}$$



※練習27 の公式をさらに一般化したものであるため,
　この公式を使って練習27 を解くこともできる。

今回の問題では，A (1)，　B ($\boxed{-2+2i}$)，　C ($2-5i$)

$\alpha=1,\quad \beta=-2+2i,\quad \gamma=2-5i$ とすると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(2-5i)-1}{(\boxed{-2+2i})-1}$$

$$=\frac{1-5i}{-3+2i}$$

$$=\frac{(1-5i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}$$

$$=\frac{-3-2i+15i+10i^2}{(-3)^2-(2i)^2}$$

$$=\frac{-13+13i}{13}$$

$$=-1+i$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\boxed{\frac{3}{4}\pi}+i\sin\boxed{\frac{3}{4}\pi}\right)$$

よって

$$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\boxed{\frac{3}{4}\pi}$$