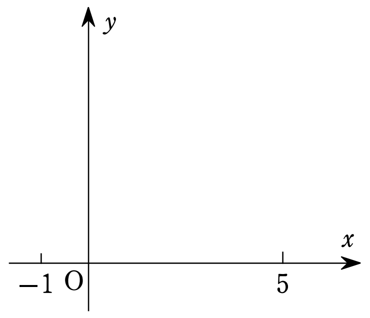
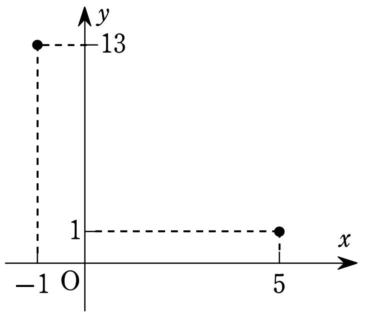
1 方針　$y=ax+b$ のグラフ、すなわち1次関数のグラフを描いて考えてみましょう。
1次関数のグラフは、 $a>0$ のとき右上がりの直線、 $a<0$ のとき右下がりの直線でしたね。紙面では伝わりづらいですが、順を追って書き足していくと

① 軸と定義域 $-1\leqq x\leqq 5$ を書き入れる。

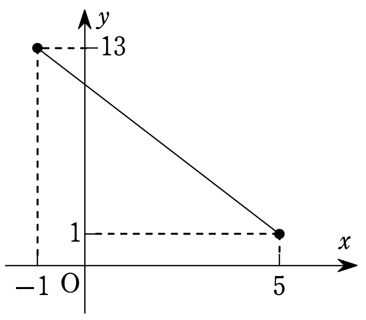


② 値域 $1\leqq y\leqq 13$ を描く。 このとき右下がりであることに気をつける。



値域が「≦」でイコールが付いているので、グラフの端は●

③ 2点を結ぶと問題の $y=ax+b$ のグラフとなる。



こんなに丁寧にグラフを書く必要はないのですが、このイメージを正しく持てると計算ミスも減ります。
よってグラフの端点は　$(-1,\ 13)$　と　$(5,\ 1)$　となります。
これを使えばあとは連立方程式を解くだけ。

解答　$a<0$ であるから、関数 $y=ax+b$ のグラフは右下がりの直線となるので、
条件から、2点　$(-1,\ 13)$, $(5,\ 1)$　を通る。
したがって、$(-1,\ 13)$ を通るから　　「～を通るから」で代入してOK

$13=-1\cdot a+b$　すなわち　$-a+b=13$　……　①

$(5,\ 1)$ を通るから

$1=5\cdot a+b$　すなわち　$5a+b=1$　……　②

これを解いて　$a=-2$,　$b=11$
これは　$a<0$　を満たす。　　条件としての $a<0$ を最後に確認する。

筆算はどこか隅に。

$$\begin{array}{rr} & -a+b=13 \\ - & 5a+b=1 \\ \hline & -6a\quad =12 \\ & a=-2 \end{array}$$

別解　（数学Ⅱ　「図形と方程式」の公式を覚えていれば）

直線の方程式
2点　$(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$a<0$ であるから、関数 $y=ax+b$ のグラフは右下がりの直線となるので、
条件から、2点　$(-1,\ 13)$, $(5,\ 1)$　を通る。
したがって、求める直線の方程式は

$$y-13=\frac{1-13}{5-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$$y=\frac{-12}{6}(x+1)+13$$

$$y=-2(x+1)+13$$

よって　$y=-2x+11$　であるから、
$a=-2$,　$b=11$
これは　$a<0$　を満たす。

2 方針　◎2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフの描き方
まずは平方完成
（復習）平方完成
$x^2+\square x$ という形から $(x+\triangle)^2$ という平方（2乗）を作る式変形のこと。
$\left(x+\dfrac{\square}{2}\right)^2$ を展開すると、

$$\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{\square}{2}+\left(\frac{\square}{2}\right)^2$$
$$=x^2+\square x+\left(\frac{\square}{2}\right)^2$$

となります。ということは $\left(\dfrac{\square}{2}\right)^2$ を移項すると、

$$\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2-\left(\frac{\square}{2}\right)^2=x^2+\square x$$

よって、左辺と右辺を入れ替えれば

$$x^2+\square x=\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2-\left(\frac{\square}{2}\right)^2$$

となります。これが平方完成の式です。「公式」とはあまり言いたくないです。
$\dfrac{\square}{2}$ ということは「□の半分」すなわち「 x の係数の半分」ですね。これを意識すると、

$x^2+8x=(x+4)^2-4^2$　　← x の係数8の半分は4
$=(x+4)^2-16$

のように式を変形できます。
（少し複雑に）
ax^2+bx の形のとき
上記の通り、 $x^2+\square x$ となっていれば平方完成ができます。
ax^2+bx の場合、まずは x^2 の係数 a をくくりましょう。文字なのでイメージがしづらいかもしれませんが、$a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x\right)$ となります。迷ったら分配法則で計算して、もとに戻るかを考えましょう。
文字ではわかりづらいので数でやってみると $3x^2+12x$ は、

$3x^2+12x=3(x^2+4x)$　　← $3\cdot x^2+3\cdot 4x$ でもとに戻る
$=3\{(x+2)^2-2^2\}$　　← x の係数4の半分は2
$=3\{(x+2)^2-4\}$　　中括弧 {} をうまく使って
$=3(x+2)^2-12$　　← 分配法則で計算して中括弧 {} を外したら終わり

とできます。
次はグラフの描き方
$y=ax^2+bx+c$ の形ではグラフを描くことができないので、上記の平方完成をして、 $y=a(x-p)^2+q$ の形にします。
そしてこの標準形 $y=a(x-p)^2+q$ について
2次関数のグラフは
　$a>0$ のとき、下に凸の放物線
　$a<0$ のとき、上に凸の放物線
　頂点は　点 $(p,\ q)$
　軸は　直線　$x=p$
となります。

$y=ax^2+bx+c$ を
2次関数の一般形
$y=a(x-p)^2+q$ を
2次関数の標準形（基本形とも）といいます。

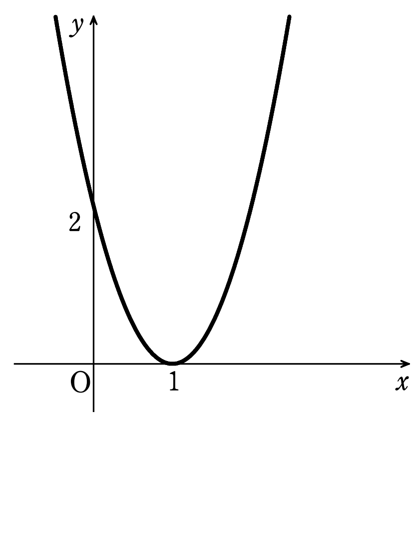
グラフを描くときにもう一つ意識してほしいことは「y 切片(y 軸との交点)」を描くこと。これは $x=0$ のときの y の値なので、 x に0を代入してもよいが、もっと簡単に一般形 $y=ax^2+bx+c$ であれば c が y 切片の値になります。

解答　(1)　$y=2x^2-4x+2$
$=2(x^2-2x)+2$
$=2\{(x-1)^2-1\}+2$
$=2(x-1)^2-2+2$
$=2(x-1)^2$

x^2 の係数2をくくる
(x^2-2x) の平方完成は中括弧 {} の中で
2は分配法則でかけ算
かっこの外を計算して終わり

したがって、グラフは下の図のようになる。
頂点：　点$(1,\ 0)$
軸　：　直線 $x=1$

$y=a(x-p)^2+q$ の形にしたとき
頂点は$(p,\ q)$
軸は　$x=p$



y 切片(y 軸との交点)は $x=0$ のとき。
すなわち、平方完成をする前の式、
$y=ax^2+bx+c$ の c が y 切片になる。

頂点は $(1,\ 0)$ なので x 軸上に。

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+x-1$

$=-\frac{1}{2}(x^2-2x)-1$　　分数 $-\frac{1}{2}$ でくくるので慎重にもとに戻るか考えながら

$=-\frac{1}{2}\{(x-1)^2-1\}-1$

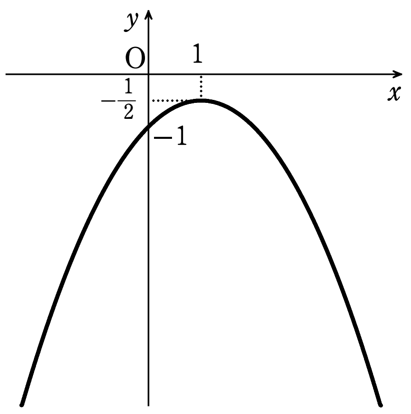
$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}-1$

$=-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}$

したがって、グラフは下の図のようになる。

頂点：　点$(1,\ -\frac{1}{2})$

軸　：　直線 $x=1$



(3) $y=(x-1)(x-2)$

$=x^2-3x+2$　　一度すべて展開

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2$

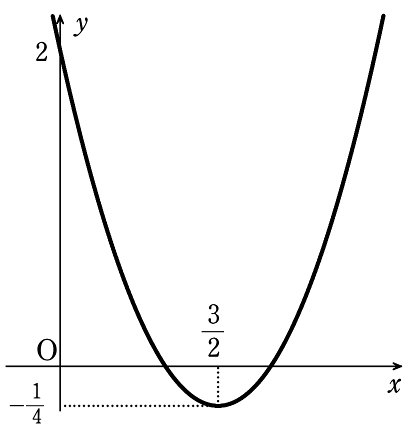
$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

したがって、グラフは下の図のようになる。

頂点：　点$(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{4})$

軸　：　直線 $x=\frac{3}{2}$



(4) $y=(2x-1)(x+3)$

$=2x^2+5x-3$

$=2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)-3$

$=2\left\{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right\}-3$

$=2\left\{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right\}-3$

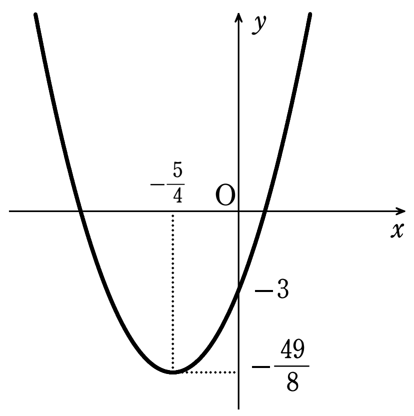
$=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}-3$

$=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{49}{8}$

したがって、グラフは下の図のようになる。

頂点：　点$(-\frac{5}{4},\ -\frac{49}{8})$

軸　：　直線 $x=-\frac{5}{4}$



$\boxed{3}$ (1) $y=2x^2-4x-1$

$=2(x^2-2x)-1$

$=2\{(x-1)^2-1\}-1$

$=2(x-1)^2-2-1$

$=2(x-1)^2-3$

であるから、頂点の座標は　A$(1,\ -3)$

(2) 方針　「平行移動」とは図形の形を変えずにそのまま上下、左右に動かすこと。

2次関数のグラフを平行移動したとき、x^2 の係数は変わりません。

すなわち $y=ax^2+bx+c$ でいうところの a の値が放物線の形、開き具合を決めています。

よって　放物線　$y=ax^2+bx+c$ を平行移動した放物線は

放物線　$y=ax^2$ を平行移動したもの

解答　この放物線を、x 軸方向に 2、y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線の頂点は

点$(1+2,\ -3+(-1))$

すなわち　　点$(3,\ -4)$

であるから、求める放物線の方程式は

$y=2(x-3)^2-4$

$=2(x^2-6x+9)-4$

$=2x^2-12x+18-4$

$=2x^2-12x+14$

別解　　一般の関数の平行移動

関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動したグラフは

$$y-q=f(x-p)$$

という便利な式があります。この式は2次関数、3次関数、4次関数、…だろうと、そして三角関数など(文字が x、y でなくても)にも応用が利く式なので覚えておきましょう。

何を表しているかというと「x 軸方向に p、y 軸方向に q」動かした分だけ、

x は $x-p$ で、y は $y-q$ で置き換えれば求められる、という式です。

これを使えば……

解答　放物線 $y=2x^2-4x-1$ を x 軸方向に 2、y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線の方程式は

$y-(-1)=2(x-2)^2-4(x-2)-1$

$y=2(x^2-4x+4)-4x+8-1-1$

$=2x^2-8x+8-4x+6$

$=2x^2-12x+14$

おまけ　Column　放物線の不思議

parabolaとは問題の流れでわかると思いますが、「放物線」の意味。

身近な例で言えば、「パラボラアンテナ」は聞いたことがありますか？まさに断面が放物線になり、どの方向から電波が入ってきても一点に集まる（この点を焦点という）ため、そこに受信機を置くことで、電波を受信しやすくしたアンテナなんですね。

最近、同名のタイトルの曲を出したグループがあったような気がしますが、そのジャケットもまさにパラボラアンテナでしたね。

数学が実用的に計算され、生きている例の一つです。

そしてこの放物線の焦点については、数学Ⅲ「式と曲線」で扱いますので理系の人はがんばりましょう。