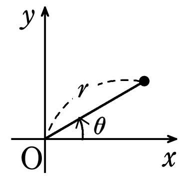
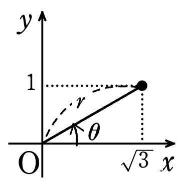
練習12

複素数を極形式で表すには…

①複素数平面上に点をとる。
②絶対値 r を求める。
③偏角 θ を求める。
　(問題文で指定されている θ の範囲に注意！)
④ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ の形で表す。



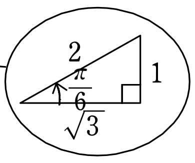
(1)　$\sqrt{3}+i$



絶対値 r は

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

また，直角三角形に着目すると



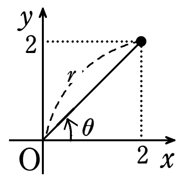
$\theta=\frac{\pi}{6}$

よって

$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ に $r=2$，$\theta=\frac{\pi}{6}$ を代入する

(2)　$2+2i$



絶対値 r は

$r=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

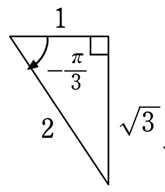
また，直角三角形に着目すると

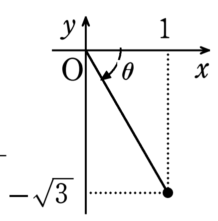
$\theta=\frac{\pi}{4}$

よって

$2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(3)　$1-\sqrt{3}\,i$





絶対値 r は

$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

また，直角三角形に着目すると

$\theta=-\frac{\pi}{3}$

よって

$1-\sqrt{3}\,i=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

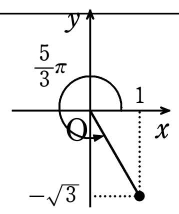
注意

右図のように $\theta=\frac{5}{3}\pi$ と考え，

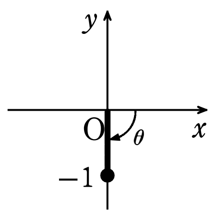
$1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$

としても等式としては正しいが，

今回の問題では，「$-\pi<\theta\leqq\pi$」と指定があるため解答としては不適。



(4)　$-i$　←　$0-i$ と考える！



絶対値 r は

$r=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$

また，右図より

$\theta=-\frac{\pi}{2}$

よって

$-i=1\cdot\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

練習13　点 z と点 $-z$ は原点に関して対称であるから，

z の偏角が θ のとき，

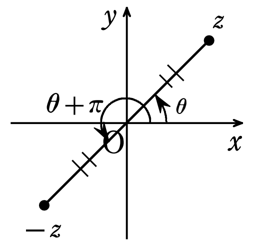
$-z$ の偏角の 1 つは　$\theta+\pi$　である。

また

$|-z|=|z|=r$

よって

$-z=r\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\}$



練習14　$\alpha\beta=2\sqrt{2}\cdot2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

練習15　(1)　$|\alpha\beta|=|\alpha|\times|\beta|=2\times3=6$

(2)　$|\alpha^3|=|\alpha|^3=2^3=8$

(3)　$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}=\frac{2}{3}$

(4)　$\left|\frac{\beta}{\alpha^2}\right|=\frac{|\beta|}{|\alpha|^2}=\frac{3}{2^2}=\frac{3}{4}$

練習16　(1)　$(1+\sqrt{3}\,i)z$

$\boxed{1+\sqrt{3}\,i\text{ を極形式で表せば，どのような移動かわかる！}}$

※極形式で表す方法は，練習12を参照すること。

$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\boxed{\frac{\pi}{3}}+i\sin\boxed{\frac{\pi}{3}}\right)$

よって

点 $(1+\sqrt{3}\,i)z$ は，点 z を原点を中心として $\boxed{\frac{\pi}{3}}$ だけ回転し，

原点からの距離を 2 倍した点である。

(2)　$(-1+i)z$

$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

よって

点 $(-1+i)z$ は，点 z を原点を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転し，

原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点である。

(3)　$2iz$

$2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

よって

点 $2iz$ は，点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転し，

原点からの距離を 2 倍した点である。

練習17　(1)　点 $4-2i$ を原点を中心として $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\left(\cos\boxed{\frac{\pi}{6}}+i\sin\boxed{\frac{\pi}{6}}\right)(4-2i)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(4-2i)$$
$$=2\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i+2i-i^2$$
$$=2\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i+2i-(-1)$$
$$=(1+2\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})i$$

(2)　$\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)(4-2i)$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)$$
$$=-2+i+2\sqrt{3}\,i-\sqrt{3}\,i^2$$
$$=(-2+\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i$$

(3)　$\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}(4-2i)$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(4-2i)$$
$$=2\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i-2\sqrt{2}\,i+\sqrt{2}\,i^2$$
$$=\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i$$

練習18　(1)　$(1+\sqrt{3}\,i)^5$

$\boxed{1+\sqrt{3}\,i\ \text{を極形式で表し，ド・モアブルの定理を利用する！}}$

$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\boxed{\dfrac{\pi}{3}}+i\sin\boxed{\dfrac{\pi}{3}}\right)$ であるから

$$(1+\sqrt{3}\,i)^5=2^5\left\{\cos\left(\boxed{\frac{\pi}{3}}\times5\right)+i\sin\left(\boxed{\frac{\pi}{3}}\times5\right)\right\}$$
$$=32\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$$
$$=32\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=16-16\sqrt{3}\,i$$

(2)　$(1-i)^8$

$1-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$ であるから

$$(1-i)^8=(\sqrt{2})^8\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\times8\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\times8\right)\right\}$$
$$=16\{\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)\}$$
$$=16(1+0i)$$
$$=16$$

(3)　$1-\sqrt{3}\,i=2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$ であるから

$$(1-\sqrt{3}\,i)^{-6}=2^{-6}\left[\cos\left\{-\frac{\pi}{3}\times(-6)\right\}+i\sin\left\{-\frac{\pi}{3}\times(-6)\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{64}(\cos2\pi+i\sin2\pi)$$
$$=\frac{1}{64}(1+0i)$$
$$=\frac{1}{64}$$

練習19　1 の n 乗根の公式（教科書p.21中段あたり参照）

> 1 の n 乗根は全部で n 個あり，
> それらを z_0，z_1，z_2，z_3，…，z_{n-1} と表すことにすると
> $$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$$

> 今回の問題では，1 の 8 乗根を求めたいので
> 上の公式に $n=8$ を代入すればよい！

1 の 8 乗根は

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{8}+i\sin\frac{2k\pi}{8}$$

すなわち

$$z_k=\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7)$$

である。

$$z_0=\cos0+i\sin0=1$$
$$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$z_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$
$$z_3=\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$z_4=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$
$$z_5=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$z_6=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi=-i$$
$$z_7=\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

よって，1 の 8 乗根は

$$1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ i,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,$$
$$-1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ -i,\ \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

別解

> 練習20 と同様に，z の極形式を
> $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
> と表して解くこともできる。
> （興味のある人はやってみよう！）

練習20　(1)　$z^2=i$

z の極形式を

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$　…①

とすると

左辺 $z^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$

であり，右辺の i も極形式で表すと

右辺 $i=1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

よって

$r^2(\cos\boxed{2\theta}+i\sin\boxed{2\theta})=1\cdot\left(\cos\boxed{\dfrac{\pi}{2}}+i\sin\boxed{\dfrac{\pi}{2}}\right)$　…②

②の両辺の絶対値を比較すると

$r^2=1$

r は z の絶対値である。
絶対値は必ず 0 以上！

$r>0$ であるから　$r=1$　…③

②の両辺の偏角を比較すると

$\boxed{2\theta}=\boxed{\dfrac{\pi}{2}}+2k\pi$　（k は整数）

偏角は $2k\pi$ の差はあってもよい。
例えば
左辺$=\dfrac{5}{2}\pi$，右辺$=\dfrac{\pi}{2}$ でもよい。
（$\dfrac{\pi}{2}$の動径と$\dfrac{5}{2}\pi$の動径は等しいため）

すなわち

$\theta=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$k=0,\ 1$ であり

$k=0,\ 1$ を代入すると

$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$　…④

③，④を①に代入して

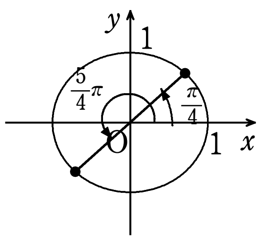
$z=1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right),\quad 1\cdot\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi+i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$

すなわち

$z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i,\quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

この解を複素数平面上に図示すると，

右図のようになる。



(2)　$z^4=-4$

z の極形式を

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$　…①

とすると

左辺 $z^4=r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)$

であり，右辺の -4 も極形式で表すと

右辺 $-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$

よって

$r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=4(\cos\pi+i\sin\pi)$　…②

②の両辺の絶対値を比較すると

$r^4=4$

$r^2>0$ であるから　$r^2=2$

$r>0$ であるから　$r=\sqrt{2}$　…③

②の両辺の偏角を比較すると

$4\theta=\pi+2k\pi$　（k は整数）

すなわち

$\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ であり

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$を代入すると

$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$　…④

③，④を①に代入して

$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right),\ \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right),$

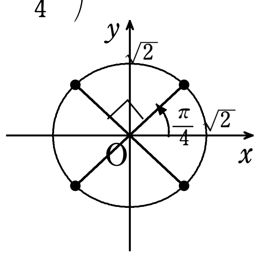
$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi+i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right),\ \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$

すなわち

$z=1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1-i$

この解を複素数平面上に図示すると，

右図のようになる。



(3)　$z^2=1+\sqrt{3}i$

z の極形式を

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$　…①

とすると

左辺 $z^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$

であり，右辺の $1+\sqrt{3}i$ も極形式で表すと

右辺 $1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

よって

$r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$　…②

②の両辺の絶対値を比較すると

$r^2=2$

$r>0$ であるから　$r=\sqrt{2}$　…③

②の両辺の偏角を比較すると

$2\theta=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$　（k は整数）

すなわち

$\theta=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$k=0,\ 1$ であり

$k=0,\ 1$ を代入すると

$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$　…④

③，④を①に代入して

$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right),\ \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{6}\pi+i\sin\dfrac{7}{6}\pi\right),$

すなわち

$z=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\quad -\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

この解を複素数平面上に図示すると，

右図のようになる。