# P.46，P.67　補充問題　解答　（数学研究・数学探究　5/18〜5/22 課題分）

$\boxed{9}$ **方針**　$2x+3y$ としてまとめて考えると進まなくなるので，$2x$ の範囲，$3y$ の範囲に区切って考える。(2) は符号に注意。

**解答**　(1)　$-1<x<2$ より，$-2<2x<4$　←各辺に 2 をかける

$1<y<3$ より，$3<3y<9$　←各辺に 3 をかける

よって，各辺を足すと

$-2+3<2x+3y<4+9$　←左，真ん中，右それぞれ足す。

ゆえに　$1<2x+3y<13$

(2)　$-1<x<2$ より，$-5<5x<10$

$1<y<3$ より，$3<3y<9$　であるから，

$-9<-3y<-3$　←各辺に $-1$ をかける。負の数をかけるので，符号に注意！

よって，各辺を足すと

$-5-9<5x+(-3y)<10-3$

ゆえに　$-14<5x-3y<7$

$\boxed{10}$ **方針**　$A<B<C$ の形の連立不等式は，$\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$ とばらして考える。

この 2 つの 1 次不等式を解いて，その<u>共通範囲を求める</u>。

「共通範囲」というのがポイント。ぜひ図を描いて考えよう！

**別解**　に分けずに解く方法も載せておきます。(2) ではできますが，(1) ではできません。何が違うのかよく考えてみましょう。

**解答**　(1)　$3x\leqq x+12<2x+8$ より

$$\begin{cases}3x\leqq x+12 & \cdots ①\\ x+12<2x+8 & \cdots ②\end{cases}$$

① より　$3x\leqq x+12$

$3x-x\leqq 12$

$2x\leqq 12$

よって　$x\leqq 6$　…　③

②より　$x+12<2x+8$

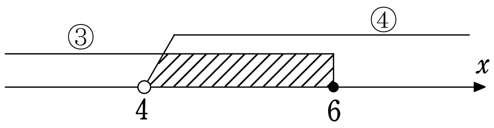
$x-2x<8-12$

$-x<-4$

よって　$x>4$　…　④　← 負の数 $-1$ で割るので不等号の向きに注意！

③，④の<u>共通範囲を求めて</u>　「共通範囲を求めて」というのが連立不等式のキーワード。書き漏らさないように！

$4<x\leqq 6$



(2)　$0.05\leqq 0.2-\dfrac{x}{100}\leqq 0.1$ より

$$\begin{cases}0.05\leqq 0.2-\dfrac{x}{100} & \cdots ①\\[2mm] 0.2-\dfrac{x}{100}\leqq 0.1 & \cdots ②\end{cases}$$

① の両辺に 100 をかけて

$0.05\times 100\leqq\left(0.2-\dfrac{x}{100}\right)\times 100$　右辺は括弧に入ります。分配法則で計算。

$5\leqq 20-x$

$x\leqq 20-5$

よって　$x\leqq 15$　…　③

② の両辺に 100 をかけて

$\left(0.2-\dfrac{x}{100}\right)\times 100\leqq 0.1\times 100$　上と同様に左辺は括弧に入ります。分配法則で計算。

$20-x\leqq 10$

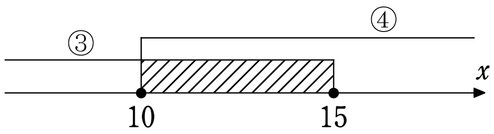
$-x\leqq 10-20$

$-x\leqq -10$

よって　$x\geqq 10$　…　④

③，④の共通範囲を求めて

$10\leqq x\leqq 15$



**別解**　$0.05\leqq 0.2-\dfrac{x}{100}\leqq 0.1$ の各辺に 100 をかけて

$$0.05\times 100\leqq\left(0.2-\frac{x}{100}\right)\times 100\leqq 0.1\times 100$$

$5\leqq 20-x\leqq 10$

各辺から 20 を引いて

$5-20\leqq 20-x-20\leqq 10-20$

$-15\leqq -x\leqq -10$

よって　$10\leqq x\leqq 15$

$\boxed{11}$ ◎「絶対値」について

絶対値、とは「数直線上で、原点からの<u>距離</u>」のこと。距離、ですから、必ず 0 以上の数になります。

例えば，　$|3|=3$，　$|-3|=3$

のようになります。

この辺はおそらく「マイナスを外せば良い」と覚えている人もいるのではないでしょうか。

では，$|x|$ のように，絶対値の中に文字が入るとどうでしょうか。

$|x|=x$　？　$|x|=-x$　？

これは $x$ の値によって答えが変わります。

上と同様に　$x=3$ のとき　$|x|=|3|=3$　であるし，

$x=-3$ のとき　$|x|=|-3|=3$　となります。

ここで，$x=-3$ のときについてもう少し深く考えると，

$|x|=|-3|=3=-(-3)=-x$

ととることができます。

$x=3$ のときは　$|x|=|3|=3=x$

ですね。

したがって，こんな分類ができます。

$|a|$ について　$\begin{cases}a\geqq 0 \text{ のとき} & |a|=a\\ a<0 \text{ のとき} & |a|=-a\end{cases}$

絶対値が出てきたらこの分類を思い出しましょう。

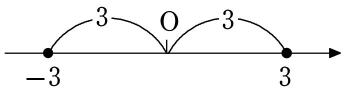
◎絶対値を含む方程式・不等式

では、絶対値の原則「数直線上で原点からの距離」というものをもとに、不等式をどう解くか。数直線をイメージしながら解いてみましょう。

例）$|x|=3$ ならば「数直線上で原点からの距離が 3」

となります。右図のように、原点からの距離が

3 になるのは $+3$ と $-3$ の 2 つですね。



そう、絶対値の方程式は答えが 2 つあります。

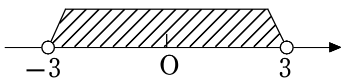
よって解は、　$x=\pm 3$　となります。　3 と $-3$ をまとめて ±3 でOK

言い換えれば「3 より近い」

$|x|<3$ ならば「数直線上で原点からの距離が 3 <u>より小さい</u>」

となります。右図のように、原点からの距離が

3 より小さいのは <u>+3 と −3 の内側</u>ですね。



あとはこれを不等式の形で表せばよいから解は、

$-3<x<3$　となります。

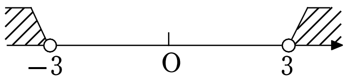
$-3$ より右側、3 より左側

言い換えれば「3 より遠い」

$|x|>3$ ならば「数直線上で原点からの距離が 3 <u>より大きい</u>」

となります。右図のように、原点からの距離が

3 より大きいのは <u>+3 と −3 の外側</u>ですね。



あとはこれを不等式の形で表せばよいから解は、

$x<-3,\ 3<x$　となります。

$-3$ より左側、3 より右側

これらをまとめると　（$a$ は 0 以上の実数）

$|x|=a \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm a$

$|x|<a \quad\Leftrightarrow\quad -a<x<a$

$|x|>a \quad\Leftrightarrow\quad x<-a,\ a<x$

**解答**

(1)　$|2x-1|=3$

$2x-1=\pm 3$

$2x=3+1,\ -3+1$　$-1$ を移項。ここから 3 と $-3$ を分けて考える。

$2x=4,\ -2$

$x=2,\ -1$

(2)　$|2x-1|<3$

$-3<2x-1<3$

$-3+1<2x<3+1$　真ん中が $x$ のみになるように計算する。各辺に 1 を加える。

$-2<2x<4$　各辺を 2 で割る

$-1<x<2$

$\boxed{12}$ **方針**　この手の問題のとき、私はよく絵を描きます。イメージを式に落とす練習をしてみましょう。

7人乗りタクシー　と　5人乗りタクシー　を合わせて8台で47人を運ぶ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\boxed{\text{7人乗り}}$ | + | $\boxed{\text{5人乗り}}$ | ≦ | ¥6100 |
| 料金 | ¥800/台 | | ¥720/台 | | |
| 台数 | $x$ 台 | | $(8-x)$ 台 | | |
| 人 | $7x$ 人 | + | $5(8-x)$ 人 | ≧ | 47 人 |

7人乗りタクシーの台数を $x$ 台とすると、5人乗りタクシーは $(8-x)$ 台ですね。
料金に関する条件をまとめてみましょう。
よって、7人乗りタクシーの代金は　　¥800 × $x$ 台 = ¥800$x$
同様に、5人乗りタクシーの代金は　　¥720 × $(8-x)$ 台 = ¥720$(8-x)$
となります。
この合計が ¥6100 を超えないようにするのだから、不等式は

$$800x+720(8-x)\leqq 6100$$

これを満たす自然数 $x$ を探します。
そして、忘れてはいけないのが人数に関する条件です。
7人乗りタクシーに乗る人数は　　7人乗り × $x$ 台 = $7x$ 人
同様に、5人乗りタクシーに乗る人数は　　5人乗り × $(8-x)$ 台 = $5(8-x)$ 人
となります。
こちらはこの合計が47人を超えなければいけないのだから、不等式は

$$7x+5(8-x)\geqq 47$$

この2つの不等式を満たす $x$ を探しましょう。

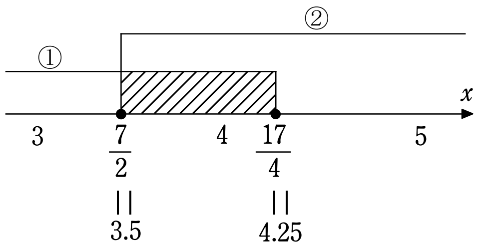
**解答**　7人乗りタクシーの台数を $x$ 台とすると、　$x$ は問題中にない文字なので必ず説明を書く！
5人乗りタクシーは $(8-x)$ 台である。
料金に関する条件より

「条件より」という文は非常に便利。
うまく説明を省略する方法も覚えましょう。

$$800x+720(8-x)\leqq 6100$$
$$800x+5760-720x\leqq 6100$$
$$800x-720x\leqq 6100-5760$$
$$80x\leqq 340$$
$$x\leqq\frac{17}{4}\quad\cdots\cdots\quad ①$$

また、人数に関する条件より

$$7x+5(8-x)\geqq 47$$
$$7x+40-5x\geqq 47$$
$$2x\geqq 7$$
$$x\geqq\frac{7}{2}\quad\cdots\cdots\quad ②$$



①、② を満たす自然数 $x$ は

$$x=4$$

$x$ が自然数であることは特に明言していないが、このような問題の場合、タクシーを $x$ 台と設定したことに $x$ が自然数であることも含まれている。

であるから、7人乗りタクシーを4台、5人乗りタクシーを4台使えばよい。
問題文が「それぞれ何台使えばよいか」となっているので、その形で答える。

$\boxed{1}$ **方針**　命題 $p\Longrightarrow q$ について、　（$\overline{p}$ は条件 $p$ の否定を表す。）

$q\Longrightarrow p$　を「逆」　　仮定と結論を逆にしたもの
$\overline{q}\Longrightarrow\overline{p}$　を「対偶」　　「逆」の仮定と結論を否定
$\overline{p}\Longrightarrow\overline{q}$　を「裏」　　仮定と結論を否定

という。下の図を覚えよう。

$$\begin{tikzcd}
p\Longrightarrow q \arrow[rr, dash, "逆"] \arrow[d, dash, "裏"'] \arrow[drr, dash] & & q\Longrightarrow p \arrow[d, dash, "裏"] \arrow[dll, dash, "対偶"] \\
\overline{p}\Longrightarrow\overline{q} \arrow[rr, dash, "逆"'] & & \overline{q}\Longrightarrow\overline{p}
\end{tikzcd}$$

**解答**　「$a+b$ は無理数　$\Longrightarrow$　$a,\ b$ の少なくとも一方は無理数」の対偶は

$a,\ b$ はともに有理数　$\Longrightarrow$　$a+b$ は有理数

「$a+b$ は無理数」を否定すると「$a+b$ は無理数でない」すなわち「$a+b$ は有理数」
「$a,\ b$ の少なくとも一方は無理数」を否定すると「$a,\ b$ は<u>ともに</u>無理数でない」すなわち、「$a,\ b$ はともに有理数」となります。「少なくとも」は「ともに」になります。

この命題は　真　である。　　有理数と有理数を足して無理数にはなりませんよね。

$\boxed{2}$ **方針**　この形式の「必要条件、十分条件」の問題はもう10年以上も毎年センター試験（今年度からは共通テスト？）に出題されている問題です。機械的に解いていきましょう。
真偽の判定さえ間違えなければ大きな得点源となる問題です。

……　$\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\text{は}}}$　～～　であるための $\boxed{\phantom{xx}}$

と出題されるので、上のように、「は」の上下に →、← を書きます。
あとは　　上の →　すなわち　……　⟹　～～　が真（○）か偽（×）かを判定。
下の ←　すなわち　～～　⟹　……　が真（○）か偽（×）かを判定。
上→　が　○　なら　「十分条件」、下←　が　○　なら　「必要条件」となります。
これを逆に覚えないように注意！

**解答** (1)　$m$ が6で割り切れること$\underset{\xleftarrow[\times]{}}{\overset{\xrightarrow{\bigcirc}}{\text{は}}}$、$m$ が2で割り切れるための $\boxed{\phantom{xx}}$

(→)　$m$ が6で割り切れるならば、$m$ はある自然数 $k$ を用いて
$m=6k$ と表せるから　$m=6k=2\cdot 3k$
よって、$m$ は2で割り切れる。　→　は　○
(←)　$m$ が2で割り切れるから、例えば $m=2$
2は当然6では割り切れないので、←　は　×（反例：$m=2$）
以上から、(c) 十分条件であるが、必要条件ではない。

(2)　$m$ が2で割り切れること$\underset{\xleftarrow[\times]{}}{\overset{\xrightarrow{\times}}{\text{は}}}$、$m$ が素数であるための $\boxed{\phantom{xx}}$

(→)　$m$ が2で割り切れるから、例えば $m=4$
よって、4は素数ではないから　→　は　×
(←)　$m$ が素数であるから、例えば $m=3$
3は2で割り切れないので、←　も　×
以上から、(d) 必要条件でも十分条件でもない。

おまけ　Column　素数は無限に存在する

コラムの通りの方法で素数が無限に存在することは比較的簡単に証明できます。
では、人間が見つけた最大の素数はいくつなのでしょうか。
現在ではその探し方は「メルセンヌ数」と呼ばれる、「$2^n-1$（$n$ は自然数）」の形の数を探すことが主流になっています。
例えば　$n=2$ のとき、$2^2-1=3$　は素数ですね。
同様に　$n=3$ のとき、$2^3-1=8-1=7$　も素数です。
$n=4$ のとき、$2^4-1=16-1=15$　は素数ではないです。
この $2^n-1$ は常に素数になるわけではなさそうです。
メルセンヌ数の中で素数になるものを「メルセンヌ**素**数」といい「$M_n$」と表します。
2018年の12月に51番目のメルセンヌ素数が見つかり、52番目は現在も世界のどこかでコンピュータが探しているのでしょうね。見つけるとそこそこのお金ももらえます。
ちなみにこの51番目のメルセンヌ素数は $M_{82589933}$ すなわち $2^{82589933}-1$
だそうで、24,862,048桁になるそうです。途方もないです。
素数が何に使われているか、大きな素数がなぜ必要なのか、など調べてみるとおもしろいかもしれません。