1 方針　代入は最後に行う。まずは式を計算してから代入した方が計算ミスしづらくなる。

解答 (1)

$$\begin{aligned} 2(A-B)-(B-C) &= 2A-2B-B+C \\ &= 2A-3B+C \\ &= 2(x+y+z)-3(2x-y-z)+(x-y-3z) \\ &= 2x+2y+2z-6x+3y+3z+x-y-3z \\ &= -3x+4y+2z \end{aligned}$$

分配法則
符号に注意

(2)

$$\begin{aligned} 3(A+C)-2(2B-A) &= 3A+3C-4B+2A \\ &= 5A-4B+3C \\ &= 5(x+y+z)-4(2x-y-z)+3(x-y-3z) \\ &= 5x+5y+5z-8x+4y+4z+3x-3y-9z \\ &= 6y \end{aligned}$$

2 (1)

$$\begin{aligned} &(2m+5)(m-2) \\ &= 2m^2-4m+5m-10 \\ &= 2m^2+m-10 \end{aligned}$$

展開の公式　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ を使ってもいいが、そんなに時間の短縮にはならないので分配法則で計算してもよいと思っています。

(2)

$$\begin{aligned} &(4x-5a)(4x+5a) \\ &= (4x)^2-(5a)^2 \\ &= 16x^2-25a^2 \end{aligned}$$

展開の公式
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(3)

$$\begin{aligned} &(-x-2)^2 \\ &= \{-(x+2)\}^2 \\ &= (-1)^2(x+2)^2 \\ &= x^2+4x+4 \end{aligned}$$

$(-x-2)=-(x+2)$ であることと、$(ab)^2=a^2b^2$ であることから $(-x-2)^2=\{-(x+2)\}^2=(-1)^2(x+2)^2$ と考えられるとよい。

(4)

$$\begin{aligned} &(x-a)(a+x) \\ &= (x-a)(x+a) \\ &= x^2-a^2 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} &(x-a+1)^2 \\ &= \{(x-a)+1\}^2 \\ &= (x-a)^2+2(x-a)+1 \\ &= x^2-2ax+a^2+2x-2a+1 \end{aligned}$$

左の計算がわかりづらかったら、文字で置き換えてもよい。ただし、その場合は置き換えたことを記述する。

$x-a=X$ とおくと、
(与式)$=(X+1)^2=X^2+2X+1=(x-a)^2+2(x-a)+1$
$=x^2-2ax+a^2+2x-2a+1$

(6)

$$\begin{aligned} &(a+b-c)(a-b+c) \\ &= \{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} \\ &= a^2-(b-c)^2 \\ &= a^2-(b^2-2bc+c^2) \\ &= a^2-b^2+2bc-c^2 \end{aligned}$$

どこで展開の公式が使えるかを考えながら

3 (1)

$$\begin{aligned} &2ax^2-8a \\ &= 2a(x^2-4) \\ &= 2a(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

因数分解の基本は「共通因数をくくる」
因数分解はできるところまで

(2)

$$\begin{aligned} &ax^2+by^2-ay^2-bx^2 \\ &= (x^2-y^2)a-(x^2-y^2)b \\ &= (x^2-y^2)(a-b) \\ &= (x+y)(x-y)(a-b) \end{aligned}$$

特定の文字について、式をまとめる。符号に注意！
このとき次数が低い文字について整理するとよい。

わかりづらければ文字で置き換える！
$x^2-y^2=X$ とおくと
(与式)$=Xa-Xb=X(a-b)=(x^2-y^2)(a-b)$

(3)

$$\begin{aligned} &(x-4)(3x+1)+10 \\ &= 3x^2+x-12x-4+10 \\ &= 3x^2-11x+6 \\ &= (x-3)(3x-2) \end{aligned}$$

まずは展開して整理する。

たすきがけ

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -3 & \longrightarrow & -9 \\ 3 & & -2 & \longrightarrow & -2 \\ \hline 3 & & 6 & & -11 \end{array}$$

(4)

$$\begin{aligned} &2n^3+3n^2+n \\ &= n(2n^2+3n+1) \\ &= n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

共通因数をくくる。

たすきがけ

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline 2 & & 1 & & 3 \end{array}$$

(5)

$$\begin{aligned} &x^3+x^2y-x^2-y \\ &= (x^2-1)y+(x^3-x^2) \\ &= (x^2-1)y+x^2(x-1) \\ &= (x+1)(x-1)y+x^2(x-1) \\ &= (x-1)\{(x+1)y+x^2\} \\ &= (x-1)(x^2+xy+y) \end{aligned}$$

次数が低い y について整理。
因数分解できる箇所がないか考える。
括弧の中に括弧を書く場合は外側の括弧は中括弧 {} にする。
括弧がうまく使えるようになると因数分解のミスが減る！
最後に中括弧を外して終わり。

(6)

$$\begin{aligned} &4x^2-y^2-2y-1 \\ &= 4x^2-(y^2+2y+1) \\ &= 4x^2-(y+1)^2 \\ &= (2x)^2-(y+1)^2 \\ &= \{2x+(y+1)\}\{2x-(y+1)\} \\ &= (2x+y+1)(2x-y-1) \end{aligned}$$

登場する文字の次数が同じときはどちらでもいいので、1つの文字について式を整理する。
何か使える公式がないか考えながら。

ここでも中括弧。
最後は外して終わり。符号に注意！

(7)

$$\begin{aligned} &x^2+2ax-3a^2+4x+8a+3 \\ &= x^2+(2a+4)x+(-3a^2+8a+3) \\ &= x^2+(2a+4)x-(3a^2-8a-3) \\ &= x^2+(2a+4)x-(a-3)(3a+1) \\ &= \{x-(a-3)\}\{x+(3a+1)\} \\ &= (x-a+3)(x+3a+1) \end{aligned}$$

x についても a についても2次式なので、どちらかについて整理する。もちろん a について整理しても答えは同じ。（詳細は別解に）

たすきがけ①

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -3 & \longrightarrow & -9 \\ 3 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline 3 & & -3 & & -8 \end{array}$$

たすきがけ②

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -(a-3) & \longrightarrow & -a+3 \\ 1 & & (3a+1) & \longrightarrow & 3a+1 \\ \hline 1 & & -(a-3)(3a+1) & & 2a+4 \end{array}$$

別解

$$\begin{aligned} &x^2+2ax-3a^2+4x+8a+3 \\ &= -3a^2+(2x+8)a+(x^2+4x+3) \\ &= -3a^2+(2x+8)a+(x+1)(x+3) \\ &= \{-a+(x+3)\}\{3a+(x+1)\} \\ &= (x-a+3)(x+3a+1) \end{aligned}$$

たすきがけ

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \times & x+3 & \longrightarrow & 3x+9 \\ 3 & & x+1 & \longrightarrow & -x-1 \\ \hline -3 & & (x+1)(x+3) & & 2x+8 \end{array}$$

(8)

$$\begin{aligned} &2x^2-xy-3y^2-3x+7y-2 \\ &= 2x^2+(-y-3)x+(-3y^2+7y-2) \\ &= 2x^2-(y+3)x-(3y^2-7y+2) \\ &= 2x^2-(y+3)x-(y-2)(3y-1) \\ &= \{x+(y-2)\}\{2x-(3y-1)\} \\ &= (x+y-2)(2x-3y+1) \end{aligned}$$

たすきがけ①

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -2 & \longrightarrow & -6 \\ 3 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline 3 & & 2 & & -7 \end{array}$$

たすきがけ②

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & (y-2) & \longrightarrow & 2y-4 \\ 2 & & -(3y-1) & \longrightarrow & -3y+1 \\ \hline 2 & & -(y-2)(3y-1) & & -y-3 \end{array}$$

4

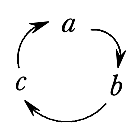
$$\begin{aligned} &a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2) \\ &= ab^2-ac^2+bc^2-a^2b+a^2c-b^2c \\ &= (c-b)a^2+(b^2-c^2)a+(bc^2-b^2c) \\ &= (c-b)a^2+(b+c)(b-c)a+bc(c-b) \\ &= (c-b)a^2-(b+c)(c-b)a+bc(c-b) \\ &= (c-b)\{a^2-(b+c)a+bc\} \\ &= (c-b)(a-b)(a-c) \\ &= (a-b)\{-(b-c)\}\{-(c-a)\} \\ &= (a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

a、b、c のどれについても2次式なので、好きな文字について整理する。
一度すべて展開してから a について整理。

符号に注意しながら、因数分解できる箇所を探す。
$(c-b)$ と $(b-c)$ 似たようなものを見つけたら、符号を括弧の外に出して、共通因数としてくくる。

$a^2-(b+c)a+bc$ の因数分解が難しいかもしれない。
足して $-b-c$ 、かけて bc になるのは $-b$ と $-c$ だと気づけるとよい。

$(c-b)(a-b)(a-c)$ で終わってもOK。
「輪環の順」と呼ばれる順にするのが一般的。輪環の順に直そうとして符号を間違うと元も子もないので注意。



$\boxed{5}$ **方針** 計算の順序、特に 2 乗するタイミングとそのときの符号に注意。

(1) $\sqrt{(x+1)^2}$

$=\sqrt{(3+1)^2}$

$=\sqrt{4^2}$

$=\sqrt{16}$

$=4$

(2) $\sqrt{(x+1)^2}$

$=\sqrt{(-1+1)^2}$

$=\sqrt{0^2}$

$=\sqrt{0}$

$=0$

(3) $\sqrt{(x+1)^2}$

$=\sqrt{(-3+1)^2}$

$=\sqrt{(-2)^2}$

$=\sqrt{4}$

$=2$

$\boxed{6}$ **方針** 「式の値」と呼ばれる形式の問題。少し難しい話をすると、「x と y を入れ替えても成り立つ式」を「対称式」といい、「対称式は必ず『基本対称式』を用いて表すことができる」という性質があります。

「基本対称式」とは 2 文字 x と y の場合は $x+y$ と xy のこと。3 文字の場合もありますが、煩雑になるのでここでは省略します。

この問題の場合、(1)、(2) で基本対称式を求めているので、(3)、(4) はそれを利用して求めること。

「力尽く」は計算ミスのもと。

解答

(1) $x+y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

(2) $xy=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2\cdot 2}=\dfrac{3-5}{4}$

$=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

(3) x^2+y^2

$=(x+y)^2-2xy$

$=(\sqrt{3})^2-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=3+1$

$=4$

x と y を入れ替えても y^2+x^2 となるだけで、式は変わらないので、対称式。
(1)、(2) を使って表す方法を考える。

x^2+y^2 から、x^2 と y^2 が出てくる式、$(x+y)^2$ を考える。
展開すると　$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
「$2xy$」を移項して、左辺、右辺を入れ替えると
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
となる。これを利用する。
応用すると　x^3+y^3　も同様に基本対称式で表せるので余裕があれば考えてみよう。

(4) x^3y+xy^3

$=xy(x^2+y^2)$

$=-\dfrac{1}{2}\cdot 4=-2$

$\boxed{7}$ **方針** （方針というか余談。）

◎なぜ分母の有利化を行うのか

分母の有利化をする理由は、「その値のおおよその値を知るため」に行います。例えば、$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ はおおよそいくつか、という問いに対して、文字通り計算すると $1\div\sqrt{2}=1\div 1.414\cdots=?$ というように、暗算では難しくなります。

しかし、$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ と有利化しておくと、$\sqrt{2}\div 2=1.414\cdots\div 2=0.7\cdots$ とおおよその計算は暗算でもできるようになります。この性質を利用した問題です。

解答 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を利用して有利化する。
分母は分配法則で計算することに注意！

$=\dfrac{2+\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1^2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-1}=2+\sqrt{2}$

$\sqrt{2}=1.4142$ を代入

$=2+1.4142=3.4142$

$\boxed{8}$ (1) $2\sqrt{27}-3\sqrt{12}+\sqrt{54}$

$=6\sqrt{3}-6\sqrt{3}+3\sqrt{6}$

$=3\sqrt{6}$

$\begin{array}{r|l} 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ & 3 \end{array}$ 　 $\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ 2 & 6 \\ & 3 \end{array}$ 　 $\begin{array}{r|l} 2 & 54 \\ 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ & 3 \end{array}$

$\sqrt{27}=3\sqrt{3}$　$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$　$\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$

$=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2$

$=3+2\sqrt{18}+6$

$=9+6\sqrt{2}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{8}}{\sqrt{8}\sqrt{8}}$

分子は括弧に入るので注意。

$=\dfrac{\sqrt{24}-\sqrt{8}}{8}$

$=\dfrac{\cancel{2}\sqrt{6}-\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{8}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

この約分に注意
$\dfrac{\cancel{2}\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{\cancel{8}}=\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{4}$ としないこと。
厳密には $\dfrac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{8}=\dfrac{\cancel{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\cancel{8}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ としていることを意識できるとよい。

(4) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{2\sqrt{6}-2\cdot 3+2-\sqrt{6}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{\sqrt{6}-6+2}{2-3}$

$=\dfrac{\sqrt{6}-4}{-1}=-(\sqrt{6}-4)=4-\sqrt{6}$

分母のマイナスの扱いに注意！

(5) $\dfrac{3}{2-\sqrt{7}}=\dfrac{3(2+\sqrt{7})}{(2-\sqrt{7})(2+\sqrt{7})}=\dfrac{6+3\sqrt{7}}{2^2-(\sqrt{7})^2}=\dfrac{6+3\sqrt{7}}{4-7}$

$=\dfrac{\cancel{6}+\cancel{3}\sqrt{7}}{-\cancel{3}}$

$=-(2+\sqrt{7})$

$=-2-\sqrt{7}$

約分、分母のマイナスの扱いに注意！

(6) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{(3+\sqrt{3})\sqrt{6}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})\sqrt{6}}$

一度に有利化はできないので、$\sqrt{6}$ から順に。

$=\dfrac{3\sqrt{6}+\sqrt{18}}{6(1+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6(1+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6(1+\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{3})}$

次は $1+\sqrt{3}$ の有利化

$=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(1-\sqrt{3})}{2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{18}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2(1-3)}$

$=\dfrac{-3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2\cdot(-2)}=\dfrac{-2\sqrt{2}}{-4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

別解 こっちの方が早い……？

$\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{18}}$

先に分母の計算

$=\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}=\dfrac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+3\sqrt{2})(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}$

$=\dfrac{3\sqrt{6}-9\sqrt{2}+\sqrt{18}-3\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2-(3\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{-9\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{6-18}=\dfrac{-6\sqrt{2}}{-12}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$